

**GEODÉSIA FÍSICA:
NOTAS DE AULA**

POR

José Milton Arana

Departamento de Cartografia
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Unesp – Campus de Presidente Prudente

MARÇO / 2000

SUMÁRIO

CAPA	i
CONTRA CAPA	ii
SUMÁRIO	iii
1 GEODÉSIA FÍSICA	1
1.1 Introdução	1
1.2 Coordenadas geodésicas	2
1.3 Geodésia Física	4
1.3.1 <i>Campo da gravidade</i>	4
1.3.2 <i>Componentes da força de atração</i>	6
2 POTENCIAL DE ATRAÇÃO	9
2.1 Operadores	11
2.2 Campos vetoriais	12
2.3 Geóide e desvio da vertical	13
2.4 Campo da gravidade terrestre	14
2.5 Geópes e vertical	16
3 EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA GEODÉSIA FÍSICA	18
3.1 Potencial perturbador	18
3.2 Anomalia da gravidade	20
3.3 Distúrbio da gravidade	21
3.4 Equação fundamental da Geodésia Física	21
3.5 Potencial perturbador, anomalias e ondulações expressos em séries de harmônicos esféricos	23
4 PROBLEMA DE CONTORNO	28
4.1 Determinação gravimétrica das ondulações do geóide e do desvio da vertical	29
4.2 Integral de Stokes	30
4.3 Co-geóide	32
4.4 Restrições na aplicação da integral de Stokes	32
4.5 Fórmula de Vening-Meinesz	33
4.6 Aplicação da Fórmula de Stokes	33
4.6.1 <i>Determinação de N pelo método das zonas.</i>	34

4.6.2	Determinação de N pelo método dos quadrados	35
5	REDUÇÕES GRAVIMÉTRICAS	37
5.1	Anomalia free-air	39
5.2	Anomalia de Bouguer	39
5.3	Reduções isostáticas	41
5.3.1	<i>Sistema de Pratt-Hayford</i>	41
5.3.2	<i>Sistema de Airy-Heiskanen</i>	41
5.4	Efeito indireto	41
6	ALTITUDE	43
6.1	Números geopotenciais	44
6.2	Altitudes científicas	45
6.2.1	<i>Altitude ortométrica</i>	46
6.2.2	<i>Altitude de Helmert</i>	47
6.2.3	<i>Altitude de Vignal</i>	47
6.2.4	<i>Altitude normal</i>	47
6.2.5	<i>Altitude dinâmica</i>	48
6.3	Influência da atração luni-solar no valor da gravidade	49
7	MÉTODOS PARA DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE	50
7.1	N a partir da anomalia da gravidade	50
7.2	N a partir do desvio astro-geodésico	51
7.3	N a partir de modelos do geopotencial	53
7.3.1	<i>Modelo OSU91A</i>	54
7.3.2	<i>Modelo EGM96</i>	55
7.4	N a partir do GPS/nivelamento	56
7.5	Determinação de N a partir do GPS/nivelamento associados aos modelos do geopotencial	58
8	BIBLIOGRAFIA	61

NOTAS DE AULAS

Geodésia Física

1. INTRODUÇÃO

Rotineiramente a Geodésia Física preocupa-se com o estudo da gravidade e suas aplicações geodésicas, pois o geodesta sempre está envolvido com três superfícies:

- **superfície física da Terra** é a superfície onde são efetuadas as operações geodésicas;
- **superfície de referência** é a superfície do modelo geométrico adotado - onde são efetuado os cálculos geodésicos (usualmente o elipsóide de revolução);
- **geóide** é uma superfície eqüipotencial do campo da gravidade, em uma primeira aproximação é aquela que mais se aproxima ao nível médio dos mares não perturbado.

Usualmente, devemos “conhecer” o geóide, pois entre outras, a altitude ortométrica (que possui interesse às obras de engenharia) é definida como “distância, contada ao longo da linha vertical, do geóide ao ponto de interesse”. A altitude ortométrica pode ser obtida com o nivelamento geométrico associado à gravimetria, ou com rastreamento de satélites artificiais onde são conhecidas as ondulações do geóide **N** (**ondulação do geóide ou altura geoidal** é definida como a distância, contada ao longo da vertical, do elipsóide de referência ao geóide).

Entende-se por superfície eqüipotencial, àquela que em todos os seus pontos possui o mesmo potencial; a superfície eqüipotencial do campo da gravidade possui a propriedade de *em todos os pontos ser perpendicular à direção da **vertical***.

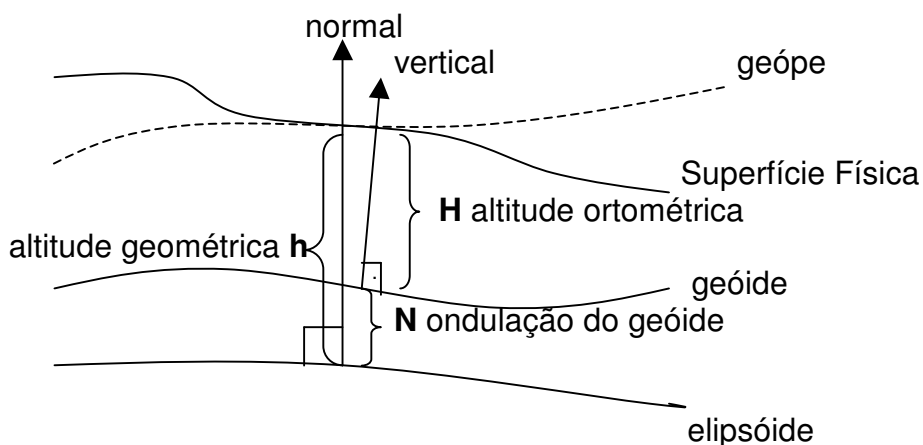


Figura 01- Superfícies de referências

1.2 Coordenadas Geodésicas

Um ponto da superfície terrestre é definida univocamente com três coordenadas: a latitude, a longitude e a altitude geométrica.

Latitude geodésica (φ) é definida como o ângulo que a normal ao elipsóide, passando pelo ponto, forma com sua projeção equatorial. (Variam de 0° à 90° e convencionalmente positivas as pertencentes ao hemisfério norte).

Longitude geodésica (λ) é o ângulo diedro formado pelo meridiano geodésico de Greenwich (origem) e o meridiano passante pelo ponto P. (Variam de 0° à 360° , positivamente por leste, ou ainda de 0° à $+180^\circ$ por leste e 0° à -180° por oeste).

Altitude geométrica é definida como a distância, contada ao longo da normal, do elipsóide de referência ao ponto. Assim, a posição de um ponto P da superfície terrestre, pode ser definida sem ambigüidade pelas três coordenadas: latitude, longitude e altitude geométrica.

Azimute geodésico é definido como o ângulo que o meridiano passante pelo ponto forma com uma direção, usualmente contada a partir do norte por leste.

Com auxílio da Figura 01, tem-se:

$$h = N + H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.01$$

A Equação 1.01 relaciona a separação entre as três superfícies: do modelo, do geóide e de referência.

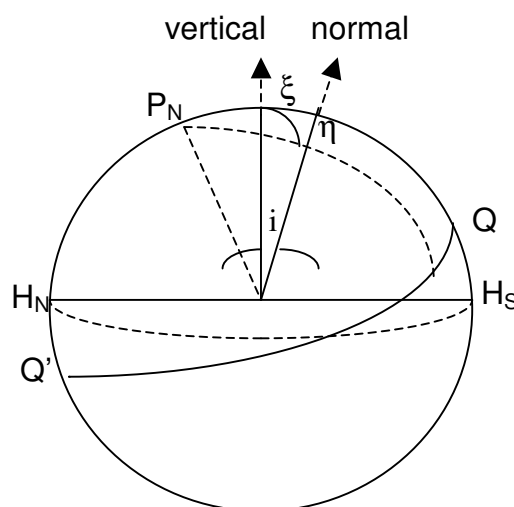


Figura 02 - Desvio da Vertical

Desvio da Vertical (i) é o ângulo formado pela normal (ao elipsóidear) e pela vertical (perpendicular ao geope passante pelo ponto).

O desvio da vertical (i) pode ser decomposto em:

- componente meridiana (ξ); e
- componente primeiro vertical (η).

A componente meridiana do desvio da vertical pode ser determinada por:

$$\xi = \varphi_a - \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.02$$

$$\eta = (\lambda_a - \lambda) \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.03$$

$$\eta = (A_a - A) \cotg \varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.04$$

Das Equações 1.03 e 1.04, tem-se:

$$(\lambda_a - \lambda) \cos \varphi = (A_a - A) \cotg \varphi$$

ou

$$A = A_a - (\lambda_a - \lambda) \operatorname{sen} \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.05$$

Estas equações permitem transformar grandezas Astronômicas em Geodésicas e vice-versa, conhecidas as componentes do desvio da vertical. A Equação 05 é conhecida como Equação de Laplace (simplificada), possibilita a transformação de Azimute Astronômico em Geodésico, sem o conhecimento do desvio da vertical.

As componentes do desvio da vertical também podem ser determinadas a partir da anomalia da gravidade, a qual também permite a determinação da ondulação do geóide. Estes problemas são casos particulares da Geodésia Física, que faz parte de um mais geral "problema de contorno da Geodésia Física", que implica na determinação gravimétrica da superfície terrestre.

1.3 Geodésia Física

A “área” da Geodésia que se conhece sob a denominação de Geodésia física preocupa-se com o estudo da gravidade e suas aplicações geodésicas. A partir das identidades de Green pode-se chegar às equações integrais que relacionam a Superfície Física do planeta com o potencial da gravidade e sua derivada normal.

Os instrumentos usados pelos geodestas estão sujeitos à diversas forças físicas. A interpretação correta das medidas efetuadas necessita do conhecimento destas forças. A força mais comum é a Força da Gravidade da Terra. Para se estudar a geometria da Terra, o geodesta necessita do entendimento do Campo da Gravidade Terrestre, para este entendimento a teoria de Newton é suficiente.

As determinações relativas da gravidade, notadamente simplificada com a utilização de gravímetros, permitem chegar às anomalias da gravidade e a partir destas é possível o cálculo das componentes do desvio da vertical (utilizam-se das fórmulas de Vening-Meinesz) e das ondulações do geóide (utilizando-se da Integral de Stokes), estes são considerados casos particulares do *Problema de Contorno da Geodésia Física*, que implica na determinação gravimétrica da Superfície Física da Terra (utilizando-se da Fórmula de Hunter-Molodenski).

1.3.1 Campo da Gravidade

A *Lei da Gravitação Universal* foi formulada por Newton, com base nas Leis de Kepler. A Lei da Gravitação Universal nos diz “ *Uma partícula de matéria isolada no universo atrai outra partícula, com uma força cuja direção é a linha que as unem, cuja magnitude é diretamente proporcional ao produto de suas massas, e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separam*”.

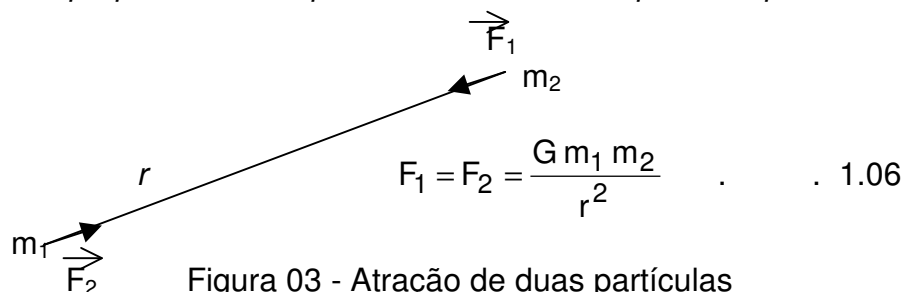


Figura 03 - Atração de duas partículas

A força exercida pelas partículas é conhecida como Força Gravitacional, também conhecida como Força de Atração Gravitacional ou Força de Atração de Newton. G é conhecido como Constante de Newton ou Gravitacional.

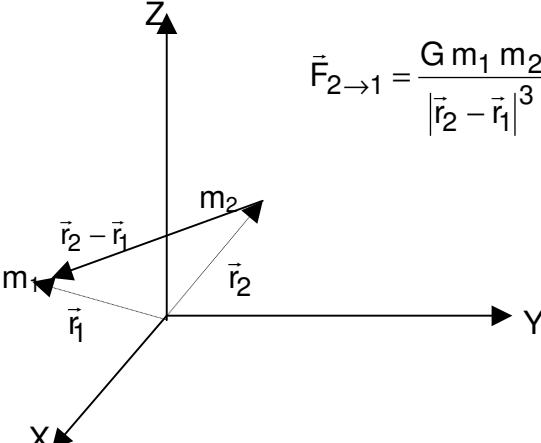
No sistema CGC, tem-se

$$G = 66,72 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

No sistema Internacional,

$$G = 66,72 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Vetorialmente, a força exercida por dois corpos m_1 e m_2 de dimensões negligenciáveis, será:



$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad . \quad . \quad 1.07$$

Figura 04 - Força Vetorial

Usualmente, considera-se uma das partículas atrativa e a outra como atraída.

$m_1 = m$ (partícula atrativa, de coordenadas x' , y' , e z')

$m_2 = 1$ partícula atraída (x , y , z)

$$F = \frac{GM}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.08$$

$$\left. \begin{aligned}
 F_x &= -\frac{Gm}{r^3}x \\
 F_y &= -\frac{Gm}{r^3}y \\
 F_z &= -\frac{Gm}{r^3}z
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots 1.12$$

Prova:

Calculando-se o módulo da força de atração:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = \left(-\frac{Gm}{r^3}\right)^2 (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{G^2 m^2}{r^6} r^2$$

$$F^2 = \frac{G^2 m^2}{r^4} \quad \therefore F = \frac{Gm}{r^2}$$

No caso geral, onde o sistema de massa atrativa não é coincidente com a origem do sistema de coordenadas P'(x',y',z'), tem-se:

$$\bar{F} = -\frac{Gm}{r^3} \left[(x-x')^2_{\bar{i}} + (y-y')^2_{\bar{j}} + (z-z')^2_{\bar{k}} \right] \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots 1.13$$

Considerando um sistema discreto de massas atrativa formado **n** partículas não coincidente com a origem do sistema de coordenadas P'(x',y',z'), a expressão da força será:

$$\vec{F} = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^3} \vec{r}_i \dots \dots \dots 1.14$$

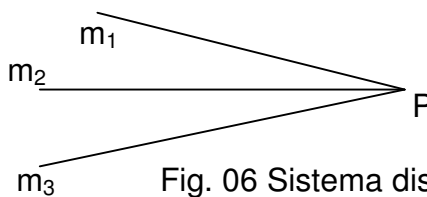


Fig. 06 Sistema discreto

Cujas componentes serão:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -G \sum_{i=1}^n \frac{(x-x'_i)}{r_i^3} m_i \\ F_y &= -G \sum_{i=1}^n \frac{(y-y'_i)}{r_i^3} m_i \\ F_z &= -G \sum_{i=1}^n \frac{(z-z'_i)}{r_i^3} m_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 1.15$$

Considerando um sistema contínuo de massas atrativa, encerrado por um volume v, tem-se:

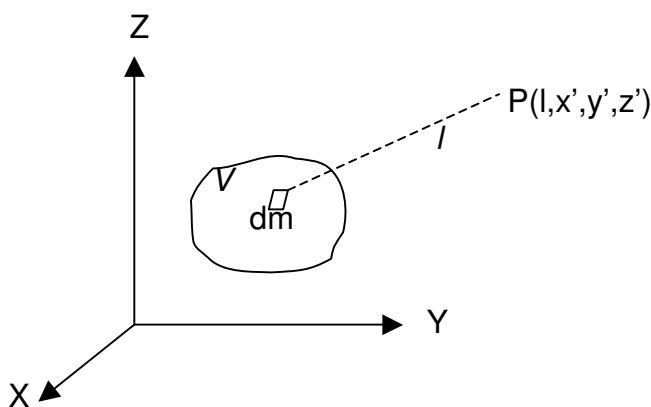


Figura 07 – Sistema contínuo de massas

$$F = -G \int_M \frac{dm}{r^3} \vec{r} \dots \dots \dots 1.16$$

cujas componentes serão:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -G \int_M \frac{x-x'}{r^3} dm \\ F_y &= -G \int_M \frac{y-y'}{r^3} dm \\ F_z &= -G \int_M \frac{z-z'}{r^3} dm \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 1.17$$

2 POTENCIAL DE ATRAÇÃO

O potencial gravitacional ou de atração (newtoniano) é uma função escalar de posição, definida por:

$$V_P = \frac{GM}{r} \dots \dots \dots 2.1$$

V_P é o potencial exercido pela massa $M(x', y', z')$ sobre a partícula de massa unitária $P(x, y, z)$.

No caso de um sistema de discreto de massa, o potencial gravitacional é dado por:

$$V = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i} \dots \dots \dots 2.2$$

E no caso de um sistema com distribuição contínua de massas, o potencial de atração será:

$$V = G \int_M \frac{dm}{r} \dots \dots \dots 2.3$$

Lembrando que densidade (δ) é dado por:

$$\delta = \frac{m}{v}, \text{ tem-se:}$$

$$\delta = \frac{dm}{dv}$$

ou

$$dm = \delta dv \quad 2.4$$

Substituindo em 2.3, tem-se:

$$V = \int \frac{\delta}{r} dv \quad 2.5$$

Onde,

$dv = dx dy dz \Rightarrow$ elemento de volume.

O potencial gravitacional é uma função escalar de posição (varia de ponto a ponto) e,

$V = V(x, y, z)$, tem-se:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{GM}{r} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = GM \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right)$$

2.6

mas,

$$r = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

desenvolvendo, tem-se:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{GM}{r^3}x; \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{GM}{r^3}y \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{GM}{r^3}z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots 2.7$$

Comparando com o grupo de fórmulas 1.12, tem-se:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F_x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = F_y$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = F_z$$

Este desenvolvimento nos mostrou que as derivadas do potencial gravitacional segundo os eixos coordenados proporcionam as componentes da força de atração em relação aos mesmos eixos.

2.1 Operadores

a) Nabla

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

b) Gradiente de um escalar E

$$\text{grad } E = \vec{\nabla} E$$

c) Divergência de um vetor $\vec{A} [A_x, A_y, A_z]$

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad \text{Onde o ponto } (\cdot) \text{ significa produto interno de vetores.}$$

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

d) Rotacional de um vetor \bar{A}

$$\operatorname{rot} \bar{A} = \bar{\nabla} \wedge \bar{A}$$

$$\operatorname{rot} \bar{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

e) Operador de Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} E$$

2.2 Campos vetoriais

Se a cada ponto de uma região pudermos associar de maneira unívoca um vetor à região em apreço, o conjunto de vetores associados constituem um **campo vetorial**. Exemplo de tais vetores são força de atração, velocidade, aceleração que são “função de ponto” e admitiremos que variam de maneira contínua e uniforme, isto é, as derivadas das componentes do genérico vetor são finitos e determinados.

O Campo da Gravidade sendo um campo vetorial significa que há um vetor, isto é, um tripleto de números associados para cada ponto no espaço.

O potencial da gravidade **W** deve conter todas as informações que há no campo da gravidade. Espera-se que o potencial “suave” refira-se a um campo da gravidade também suave. Um potencial irregular deve representar um campo da gravidade também irregular. —

A superfície eqüipotencial da gravidade é uma superfície onde o potencial gravidade (geopotencial) é constante

$$W = \text{Constante}$$

Há uma infinidade de superfícies equipotenciais, simplesmente assumindo valores diferentes para o potencial. As linhas de forças do campo da gravidade terrestre são chamadas *linhas de prumo* (*plumb-line*).

Descreve-se abaixo algumas propriedades das superfícies equipotenciais do campo da gravidade:

- Nunca se cruzam, são superfícies fechadas, cada uma “cobrindo” a outra tal como uma cebola;
- Elas são contínuas;
- O raio de curvatura varia muito lentamente de ponto a ponto;
- As superfícies equipotenciais são convexas em todos os pontos (elas não tem baixadas ou vales)

2.3 Geóide e desvio da vertical

A superfície equipotencial do campo da gravidade de particular interesse é aquela que mais se aproxima ao nível médio dos mares não perturbado, estendido sobre toda a Terra.

Ela é chamada **geóide**, Gauss descreveu o geóide como uma superfície matemática da Terra, e portanto é a superfície “chave” na Geodésia, prestando um papel importante em posicionamento. Em uma primeira aproximação o geóide pode ser representado pelo nível médio dos mares.

O desvio da vertical “mede” a inclinação entre as superfícies do elipsóide de referência e a do geóide. (Estes assuntos serão tratados pormenorizadamente em capítulos seguintes). O desvio da vertical é o ângulo que a vertical do lugar (materializada pelo fio de prumo) forma com a normal (ao elipsóide).

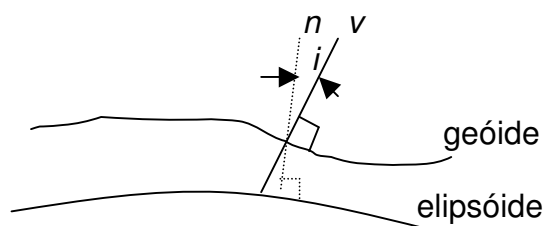


Figura 08 – Geóide e desvio da vertical

2.4 Campo da Gravidade Terrestre

As transformações das observações geodésicas, coletadas no espaço físico (afetada pela força da gravidade) para o espaço geométrico, nas quais as posições são relacionadas **requer** o conhecimento do Campo da Gravidade da Terra.

O Campo da Gravidade é um campo vetorial, possui magnitude (valor absoluto) e direção. A magnitude é um escalar com unidade *Gal*, nome este devido ao Glileu Galilei, $1 \text{ Gal} = \text{cm/s}^2$. A gravidade média é da ordem de 980 Gal

Os instrumentos usados pelos geodestas estão sujeitos à diversas forças físicas. A interpretação correta das medidas necessita do conhecimento destas forças. A força mais comum é a Força da Gravidade da Terra. Assim, para estudar a geometria da Terra, o geodesta necessita entender o campo da gravidade terrestre, onde, para tal a Teoria de Newton é suficiente.

Para estudar as propriedades geométricas do campo de força da gravidade \bar{F} , é suficiente o estudo da aceleração da gravidade \bar{g} . A massa \underline{m} pode ser considerada como um escalar do campo F . O vetor gravidade dá uma completa descrição do campo de força gravitacional.

O campo da gravidade é conservativo, ou seja, é dotado de um potencial escalar $V = V(x, y, z)$, tal que:

$$\bar{F} = \text{grad } V, \quad \dots \quad 2.8$$

então:

$$F = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

ou

$$F = F_x + F_y + F_z \quad \dots \quad 2.9$$

A partir das expressões acima, tem-se que as derivadas parciais de V segundo os eixos coordenados representam as componentes do vetor \bar{F} segundo os mesmos eixos; o que confere a V a qualidade de potencial.

Assim,

O módulo de g (gravidade) pode ser obtida através de determinações **absolutas** ou, indiretamente, por meio de determinações **relativas**. Sempre considera-se a partícula atraída com massa unitária, os módulos da **Força** e da **Aceleração** podem ser expressas pelo mesmo número (grandeza), respeitada a unidade de cada uma delas.

- **Força da gravidade**, expressa em Newton $\times 10^{-5}$,
- **Aceleração da gravidade**, expressa em miligal.

A **atração luni-solar** perturba o vetor da gravidade \bar{g} em **módulo** e em **direção**. A perturbação em módulo afeta as medidas da gravidade e perturbação em direção afeta o desvio da vertical (inclinação entre a superfície do geóide e o elipsóide), repercutindo no nivelamento geométrico. Nas determinações de alta precisão, os efeitos atrativos da Lua e do Sol devem ser eliminados matematicamente.

2.5 Geóides e vertical

As superfícies eqüipotencias, também denominados de **superfícies de nível**, caracterizam-se por apresentar o mesmo potencial em todos os seus pontos. No caso particular do *campo da gravidade* estas superfícies são denominadas de **GEÓIDES**.

$$W_{(x, y, z)} = \text{Constante}$$

As linhas de forças do campo da gravidade terrestre são denominadas de **“linhas de prumo”**, e na literatura inglesa de **“plumb-line”**.

Segue algumas propriedades das superfícies eqüipotenciais:

- Nunca se cruzam, são superfícies fechadas, cada uma cobrindo a outra tal como uma cebola;
- Elas são contínuas;
- Não apresentam “quebra brusca”;
- O raio de curvatura local muda muito lentamente de ponto para ponto, com exceção onde a densidade de massas variam bruscamente; e
- As superfícies eqüipotenciais são convexas em todos os pontos (elas não tem “baixadas”, vales ou valas).

Quando movimentando sobre uma superfície eqüipotencial (o potencial não muda) não realizamos trabalho, pois este movimento não vai no mesmo sentido e nem contra a direção do campo de força. A conseqüência é que as linhas de forças devem ser perpendicular às superfícies eqüipotenciais. Como a direção da linha de prumo é referida com a direção da vertical, as superfícies eqüipotenciais definem a direção horizontal, desta forma são chamadas de superfície de nível.

O **geópe fundamental** é o **geóide** (W_0), este é definido com sendo a “superfície eqüipotencial que mais se aproxima ao nível médio dos mares não perturbado, prolongada aos continentes”

A Figura 09, abaixo, mostra-nos o caso ideal: corpo esférico, imóvel, com distribuição de massas perfeitamente homogênea. Assim, pontos eqüidistantes do centro possuem o mesmo potencial resultando superfícies eqüipotenciais esféricas e concêntricas (as radiais representam as linhas de força do campo

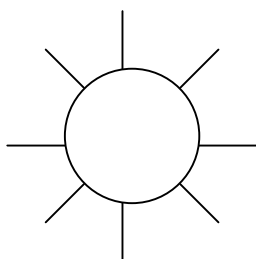


Figura 09 – Campos de forças (caso ideal)

Imprimindo ao corpo (caso acima) um movimento de rotação, resultará que as superfícies eqüipotenciais deixarão de ser esféricas, pois a contribuição do potencial centrífugo diminui com o aumento da latitude (nos pólos a força centrífuga é nula). Se a distribuição de massas deixam de ser simétricas, elas “fugirão” também do modelo primitivo (caso ideal). A principal conseqüência é que as linhas de forças, conservando-se, perpendiculares às superfícies eqüipotenciais, elas deixam de ser retas, conforme ilustrado na Figura 10.

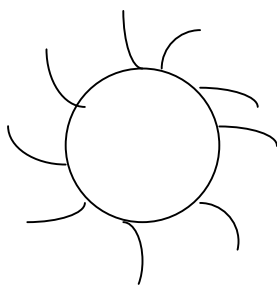


Figura 10 – Campo de forças (corpo em rotação)

3 EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA GEODÉSIA FÍSICA

3.1 Potencial anômalo

Defini-se **Terra Normal** como “*corpo sólido, homogêneo, com a mesma massa da Terra Real, incluindo a atmosfera, cuja figura geométrica é o elipsóide de revolução, com as dimensões do modelo adotado, possuindo uma velocidade de rotação uniforme, cujo período é igual ao da Terra Verdadeira, possui superfície limitante eqüipotencial $U = W_{geóide}$ ”.*

A diferença entre os potenciais produzidos, num mesmo ponto, pela *Terra Real* e pela *Terra Normal*, denomina-se de **Potencial Perturbador** ou **Potencial Anômalo**. Matematicamente pode ser considerado como o potencial gerado pelas “**massas anômalas**”, estas massas “transformam” a Terra Normal em Terra Verdadeira. A soma das massas anômalas, positivas e negativas, é nula; pois admite-se que a Terra Normal e a Verdadeira possuem massas iguais (da definição de Terra Normal), varia apenas a distribuição de massa.

O potencial produzido pela Terra Verdadeira é denominado de **Geopotencial (W)**, e o potencial produzido pela Terra Normal é denominado de **Esferopotencial (U)**. A diferença do Geopotencial e do Esferopotencial, em um mesmo ponto, é denominado de **Potencial Anômalo**.

$$T = W - U \quad \dots \dots \dots \quad 3.1$$

O potencial anômalo pode ser considerado como sendo o potencial produzido pelas massa anômalas, estas transformam a Terra Normal em Terra Verdadeira.

O **Potencial Centrífugo (Q)**, é o potencial devido à rotação da Terra, é o mesmo para a Terra Real e Terra Normal, ao efetuar a operação $W - U$, tem-se que a influência do potencial centrífugo no potencial perturbador é nula. Isto significa que o potencial perturbador é uma função harmônica no exterior das massas atraentes.

Tem-se que a condição para uma função ser harmônica é:

$$\Delta \text{ Funcao} = 0$$

Mas,

Derivando esta equação (3.12) e forçando para que a normal coincida com a vertical, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial W_0}{\partial n} - \frac{\partial U_0}{\partial n} + N \frac{\partial \gamma}{\partial n} \quad \dots \dots \dots \quad 3.13$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -g + \gamma + N \frac{\partial \gamma}{\partial n}$$

$$g - \gamma = \Delta g = N \frac{\partial \gamma}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n} \quad \dots \dots \dots \quad 3.14$$

A equação acima (Eq, 3.14) é a ***Equação diferencial básica da Geodésia Física***, esta equação nos “mostra” que a anomalia da gravidade Δg é consequência de:

- a gravidade g referir-se a gravidade medida na superfície física e reduzida ao geóide, e a gravidade normal λ ser calculada sobre o elipsóide; e
- da atração das massas anômalas.

Assumindo que o *esferopotencial* sobre o elipsóide possui o mesmo valor que o *geopotencial* sobre o geóide, a Equação 3.12 será:

$$T = N \gamma \quad \dots \dots \dots \quad 3.15$$

Esta Equação (3.15) é conhecida como ***Equação de Bruns***, ela relaciona a ondulação do geóide com o potencial perturbador.

Introduzindo a Equação de Bruns na Equação diferencial básica da Geodésia Física, tem-se a ***Equação Fundamental da Geodésia Física*** (3.16):

$$\Delta g = \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n} \quad \dots \dots \dots \quad 3.16$$

A Equação Fundamental da Geodésia Física relaciona a anomalia da gravidade, que resulta de medidas efetuadas sobre a superfície física da Terra, com o potencial perturbador que é desconhecido.

3.5 Potencial perturbador, anomalias e ondulações expressos em séries de harmônicos esféricos

Conforme já visto no Item 3.1, o potencial perturbador T é uma função harmônica no exterior das massas atrativas. Isto significa que T pode ser desenvolvido em séries de harmônicos esféricos. Fazendo $r = R$, tem-se:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \dots$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{R^{n+1}} [a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(v) \quad . \quad . \quad . \quad 3.17$$

ou

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{R^{n+1}}$$

Derivando, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial R} = - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{S_n}{R^{n+2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.18$$

$$\Delta g = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{R^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{R^{n+2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.19$$

$$\Delta g = \sum \frac{S_n}{R^{n+2}} (n+1-2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.20$$

$$\Delta g = \sum (n-1) \frac{S_n}{R^{n+2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.21$$

- **fator dinâmico da forma**

Para o Sistema Geodésico de Referência 1967:

$$a = 6\,378\,160 \text{ m}$$

$$GM = 398\,603 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$J_2 = 10\,827 \times 10^{-7}$$

$$\alpha = 298,247^{-1} \text{ (este achatamento é devido ao } J_2)$$

$$J_2 = \frac{(2\alpha - m - \alpha^2)}{3} + \frac{2\alpha m}{21} \quad \dots \quad 3.30$$

m – relação entre a força centrífuga no equador e a gravidade normal equatorial,

$$m = \frac{a w^2}{\gamma_e} - \frac{3}{2} m^2 \quad \dots \quad 3.31$$

Para o Sistema Geodésico de Referência 1980

$$a = 6\,378\,137 \text{ m}$$

$$GM = 398\,600,5 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$J_2 = 10\,826,3 \times 10^{-7}$$

gravidade normal

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \text{sen}^2\varphi - \beta_1 \text{sen}^2 2\varphi - \beta_2 \text{sen}^2\varphi \text{sen}^2 2\varphi) \quad \dots \quad 3.32$$

fórmula Internacional da 1967

$$\alpha = 298,247^{-1}$$

$$w = 72\,921\,151\,467 \times 10^{-15} \text{ rad/s}$$

$$\gamma_e = 978\,031,845 \text{ mGal}$$

$$\gamma_p = 983\,217,730 \text{ mGal}$$

$$\beta = 0,005\,302\,365\,5$$

$$\beta' = -0,000\,005\,9$$

resultando:

$$\gamma = 978\,031,8 (1 + 0,005\,302\,4 \text{sen}^2\varphi - 0,000\,005\,9 \text{sen}^2 2\varphi) \text{ mGal}$$

ou

$$\gamma = 978\,031,846 (1 + 0,005\,278\,895 \text{sen}^2\varphi - 0,000\,023\,462 \text{sen}^4 2\varphi) \text{ mGal}$$

gradiente normal da gravidade normal

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} = - \frac{2\gamma}{a} (1 + \alpha - 2 \alpha \text{sen}^2 \varphi + m) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad 3.34$$

Para o Sistema Geodésico de Referência 1967,

$$a = 6\,378\,160 \text{ m}$$

$$\alpha = 298,25^{-1}$$

$m = 0,003\,449\,801\,4$, resulta:

.no equador,

$$\gamma_{\text{eq}} = 978\,031,646 \text{ mGal}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -0,30877$$

.no paralelo 45°

$$\gamma_{45} = 980\,619,047 \text{ mGal}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -0,30856$$

. no pólo

$$\gamma_{\text{p}} = 983\,217,72 \text{ mGal}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -0,30834$$

.gravidade normal em um ponto qualquer

$$\gamma = \gamma_{\text{el}} \left[1 - 2 h \left(1 + \alpha - 2 \alpha \text{sen}^2 \varphi + m \right) / a + 3 h^2 / a^2 \right]$$

.Unidades

$$\text{Gal} \quad \text{m s}^{-2} \quad \text{ou} \quad \text{cm s}^{-2}$$

$$\text{miliGal mGal} \quad \text{m s}^{-2} \times 10^{-5}$$

$$\text{microGal } \mu\text{Gal} \quad \text{m s}^{-2} \times 10^{-8}$$

$$N = \text{Kg} \cdot 1 \text{ m s}^{-2}$$

$$F = m \cdot a$$

Exercício:

Calcular a gravidade normal, referente ao SAD69, para $\varphi = 20^\circ\text{S}$; para $\varphi = 22^\circ\text{S}$; para 24°S ; para 26°S ; e para 28°S .

4 PROBLEMA DE CONTORNO

problema direto da Teoria do Potencial

”determinação do potencial a partir das massas geradoras”

problema inverso da Teoria do Potencial

“a partir do potencial, determinar as massas geradoras”

O problema inverso não admite solução única, pois existem infinitas distribuições de massas que conduzem ao mesmo potencial (tal conclusão basta considerar esferas concêntricas com a mesma massa). Interessa ao geodesta o problema inverso.

Problema de contorno (da Teoria do Potencial)

- primeiro problema – **DIRICHLET**

“determinar uma função harmônica no interior de uma dada superfície **S** quando são conhecidos os valores que a função assume sobre a superfície (contorno)”.

- segundo problema – **NEUMANN**

“determinar uma função harmônica no interior de uma dada superfície **S** quando são conhecidos os valores que a derivada normal da função assume sobre a superfície”.

- terceiro problema – **HILBERT**

“determinar uma função harmônica no interior de uma dada superfície **S** quando são conhecidos os valores que assume sobre a superfície uma combinação da função e de sua derivada normal”.

Problema de contorno da Geodésia Física

O problema de contorno da Geodésia Física nos diz: “conhecidos os valores do potencial gravífico e de sua derivada normal sobre a superfície Física da Terra determinar essa superfície”. e ainda nos

diz: “conhecidos os valores do potencial gravífico e de sua derivada normal sobre a superfície Física da Terra determinar o campo gravífico externo à superfície”.

propriedades do potencial de atração

- é uma função harmônica no exterior das massas;
- satisfaz a equação de Poisson no interior de tais massas;
- é uma função escalar de ponto cujo gradiente representa a força de atração produzida pelas massas sobre a partícula de massa unitária;
- é uma função contínua;
- tem derivadas primeiras contínuas;
- tem derivadas segundas contínuas exceto sobre a superfície limitante das massas;
- tende a zero quando o ponto se afasta para o infinito;
- é uma função harmônica no interior e exterior de uma superfície material;
- é uma função cuja derivada direcional representa a componente da força de atração nessa direção; e
- é constante no interior de uma superfície material esférica.

4.1 Determinação Gravimétrica das Ondulações do Geóide e do Desvio da Vertical

A Fórmula de Stokes (1849) é de grande importância à Geodésia Física, pois proporciona a ondulação geoidal (separação entre o geóide e o elipsóide) em função das anomalias da gravidade. O uso desta fórmula envolve o conhecimento da gravidade em todo o planeta.

No trabalho original de Stokes “On the variation of gravity at the surface of the Earth”, dois tópicos são tratados:

1. Conhecendo-se a forma de uma superfície eqüipotencial, limitante de um sistema de massas atrativas, dotado de movimento de rotação e o valor da gravidade em um ponto da superfície, determinar o campo externo independente de qualquer hipótese sobre a distribuição de massas no interior da superfície; e
2. Inversamente, conhecendo-se o valor da gravidade em todos os pontos de uma superfície eqüipotencial, determinar a forma dessa superfície.

4.3 Co-geóide

A aplicação da integral de Stokes pressupõe a inexistência de massas externas ao geóide. A supressão das massas topográficas (externas ao geóide) acarreta um novo problema, ou seja, “produz” uma Terra Fictícia com a conseqüente alteração do potencial gravífico. Em tais condições, a Fórmula de Stokes proporcionará a separação entre o elipsóide de referência e um “geóide fictício”, designado por co-geóide.

4.4 Restrições na aplicação da integral de Stokes

Stokes, na dedução utilizou-se da “aproximação esférica” e também do desenvolvimento de Δg em harmônico esféricos, ocasionando problemas de convergência da série.

A integral de Stokes dever ser estendida ao total da superfície da Terra, o que implica em dizer que deve-se conhecer a anomalia da gravidade em toda a superfície da Terra, ou em quantidade e distribuição geográfica convenientes. Esta é uma grande dificuldade, pois ainda em nossos dias, são desconhecidas as anomalias da gravidade na maioria das área oceânica, nos desertos e nas florestas.

O potencial anômalo dever ser harmônico em qualquer ponto externo do geóide o que implica na necessidade da remoção das massas topográficas (massas externas ao geóide).

A fórmula de Stokes pressupõe a igualdade das massas do elipsóide de referência e da Terra Verdadeira, pressupõe também que o geopotencial ser igual ao esferopotencial do elipsóide de referência e impõe a condição de que o centro de gravidade do elipsóide coincidir com o da Terra.

A fórmula 4.9, abaixo, é designada por **Fórmula de Stokes Generalizada**

$$N = \frac{k \Delta M}{RG} - \frac{\Delta W}{G} + \frac{R}{4\pi G} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad 4.9$$

Onde:

$\frac{k \Delta M}{RG} = T_0$, representa o termo de grau zero no desenvolvimento do potencial perturbador, e

$\Delta M = M_T - M_E$, representando, respectivamente, a massa da Terra e a do elipsóide, e

$\Delta W = W_0 - U_0$, diferença entre o potencial do geóide e do elipsóide.

4.5 Fórmula de Vening-Meinesz

O cálculo das componentes do desvio da vertical podem ser calculadas por astronomia associada à geodésia. Na Geodésia Física as componentes são calculadas utilizando-se das anomalias da gravidade na fórmula de Vening-Meinesz. O desvio da vertical determinado a partir da anomalia da gravidade é denominado de desvio gravimétrico, enquanto o desvio da vertical determinado pela geodésia associada à astronomia é denominado de desvio astro-geodésico. O desvio da vertical em um ponto do geóide mede a inclinação do geóide em relação ao elipsóide de referencia.

$$\begin{aligned} \xi'' & \cos A \\ & = -\frac{\rho''}{2\pi G} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g f'(\psi) \sin \psi \, d\psi \, dA \quad . \quad . \quad 4.10 \\ \eta'' & \sin A \end{aligned}$$

A Fórmula de Vening-Meinesz (Equação 4.10) pode ser re-escrita em função de coordenadas geográficas:

$$\begin{aligned} \xi'' & \cos A \\ & = -\frac{\rho''}{2\pi G} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \Delta g(\phi', \lambda') f'(\psi) \cos \phi' \, d\phi' \, d\lambda' \quad 4.11 \\ \eta'' & \sin A \end{aligned}$$

4.6 Aplicação da Fórmula de Stokes

Quando Stokes desenvolveu a fórmula para o cálculo da ondulação do geóide, reconheceu que era um trabalho apenas teórico, pois naquela época

(meados do século XVIII) a determinação da anomalia da gravidade em todo o globo terrestre era uma tarefa inexequível. Somente após o desenvolvimento dos gravímetros (dispositivo tri-pendular de Veining-Meinesz), que possibilitam a determinação da gravidade com grande rapidez, foi possível a determinação da gravidade nos oceanos.

4.6.1 determinação de N pelo método das zonas

Considera-se a superfície da Terra dividida em zonas esféricas, onde admite-se a estação gravimétrica, na qual pretende-se determinar **N**, como polo, conforme Figura 13.

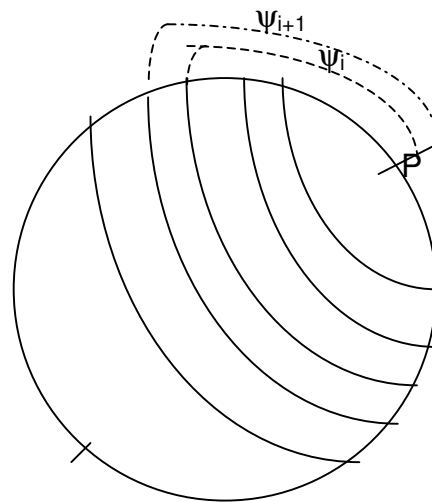


Figura 13 – Zonas esféricas

$$\Delta N = \frac{R}{G} \Delta g \int_{\psi_1}^{\psi_2} F(\psi) d\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4.12$$

Fazendo:

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} F(\psi) d\psi = \int_0^{\psi_2} F(\psi) d\psi - \int_0^{\psi_1} F(\psi) d\psi = \phi(\psi_2) - \phi(\psi_1) \quad 4.13$$

Substituindo 4.13 em 4.12, tem-se:

$$\Delta N = \frac{R}{G} \Delta g [\phi(\psi_2) - \phi(\psi_1)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .4.14$$

Onde,

$$\begin{aligned} \phi(\psi) &= \int_0^{\psi} F(\psi) = \\ &= 0,5 \left[1 + 4 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} - \cos \psi - 6 \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2} - \frac{7}{4} \operatorname{sen}^2 \psi - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 \psi \log_e \left(\operatorname{sen} \frac{\psi}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2} \right) \right] 4. \end{aligned}$$

15

Lambert e Darling tabelaram a função 4.15, cujo argumento Ψ , varia de 0° a 180° .

A contribuição, na estação gravimétrica P, das n zonas será:

$$N = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^n \Delta g_i [\phi(\psi_{i+1}) - \phi(\psi_i)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .4.16$$

Onde, Δg_i representa a anomalia média de cada zona esférica.

4.6.2 determinação de N pelo método dos quadrados

No método determinação de N pelo método dos quadrados, proposto por Hirvonen, a superfície terrestre é “dividida” em quadrados pelos paralelos e meridianos, por exemplo de 10° em 10° .

Na Fórmula 4.7, fazendo $S(\Psi) = 2 f(\Psi)$ e considerando a área elementar do pertencente à esfera de raio unitário, tem-se:

$$N = \frac{R}{2G} \int_{\sigma} \Delta g_{\sigma} f(\psi) d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .4.17$$

Substituindo-se a integral por uma somatória, tem-se:

$$N = \frac{R}{2\pi G} \sum \Delta g_q f(\psi) q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4.18$$

Onde:

- Δg_q : é a anomalia média do “quadrado”;
- ψ é a distância angular do ponto, no qual pretende-se calcular **N**, ao centro de cada quadrado; e
- **q** é a área do quadrado.

Na Fórmula 4.18, fazendo:

$$C_q = \frac{R. q. f(\psi)}{2. \pi G} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4.19$$

no qual C_q é designado por **Coeficiente de Stokes**, a contribuição do quadrado na determinação de ΔN na determinação de **N** será:

$$\Delta N = \Delta g_q C_q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4.20$$

A ondulação geoidal no ponto considerado será:

$$N = \sum C_q \Delta g_q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4.21$$

Analisando a Equação 4.19, verifica-se que o coeficiente de Stokes independe do campo da gravidade, assim, pode-se calcular este coeficiente *a priori* para cada ponto de interesse. A Função $f(\psi)$, conforme já mencionada, foram tabeladas por Lamber e Darling, assim sendo, estes coeficientes podem ser determinados na tabelas ou podem ser calculados pela Equação 4.15.

A área do quadrado **q**, pode ser calculada por

$$q = 2 \Delta\lambda \text{ sen } \Delta\phi \text{ cos } \phi_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4.22$$

Onde, $\Delta\lambda$ e $\Delta\phi$ define a amplitude do quadrado de latitude média ϕ_m .

ψ é a distância esférica da estação gravimétrica (onde se pretende determinar calcular a contribuição ΔN) ao centro do quadrado. ψ é calculado utilizando-se da fórmula fundamental da Trigonometria Esférica:

$$\cos\psi = \sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda \quad . \quad . \quad . \quad 4.23$$

O cálculo de **N** é determinado utilizando-se um mapa mundi, dividido em quadrado, onde são inscritos os coeficientes de Stokes; a partir dos dados gravimétricos de todo o Globo Terrestre avalia-se a anomalia média de cada quadrado; o produto do coeficiente de Stokes pela anomalia média do quadrado nos proporciona a contribuição ΔN do quadrado na determinação final de **N**, que será determinado pela somatória de destes ΔN .

Hirvonen, em 1934, foi o pioneiro a determinar um geóide onde, reuniu anomalias da gravidade esparsas, aproximadamente 4 500, reduziu-as a um mesmo sistema (Potsdam), calculou a ondulação do geóide em 62 pontos. Utilizando-se da anomalia Faye.

Tanni, em 1948, elaborou o mapa geoidal a partir de 218 valores de **N** calculados em anomalias isostáticas no sistema Pratt-Hayford, onde adotou a profundidade de 113,7 Km.

5 REDUÇÕES GRAVIMÉTRICAS

A anomalia da gravidade, ou o valor da gravidade estão sujeitas a diferentes tipos de reduções, que dependem da finalidade para as quais estão sendo determinadas. Exemplificando: a anomalia de Bouguer considerada isoladamente tem pouca importância ao geodesta nas determinações das ondulações do geóide; já as reduções isostática tem interesse aos geodestas e aos geólogos, mas não se adequam aos trabalhos de prospecção de natureza local.

Vimos que na aplicação da fórmula de Stokes, pressupõe o conhecimento da gravidade em toda a superfície do geóide, o que implicará na redução da gravidade *ao nível do mar*, e também pressupõe a inexistência das massas topográficas (massas externas ao geóide), assim, deve-se aplicar métodos de redução que

Substituindo estes valores em 5.9, tem-se:

$$A = 0,1119 H$$

O termo **B**, da Equação 5.8 encontra-se tabelado em função de H . O termo **C** encontra-se tabelado.

Onde, o termo **A** constitui a correção de Bouguer propriamente dita (corresponde à componente vertical da atração exercida por um platô horizontal de espessura H ¹ sobre uma partícula de massa unitária situado na sua superfície). Tal componente é aproximadamente igual à que seria produzida por uma *calota* de raio de 166,7 Km. O termo **B** “transforma” o platô em calota. O termo **C** é designado por *correção de terreno*, onde é considerado as irregularidades topográficas em relação à calota.

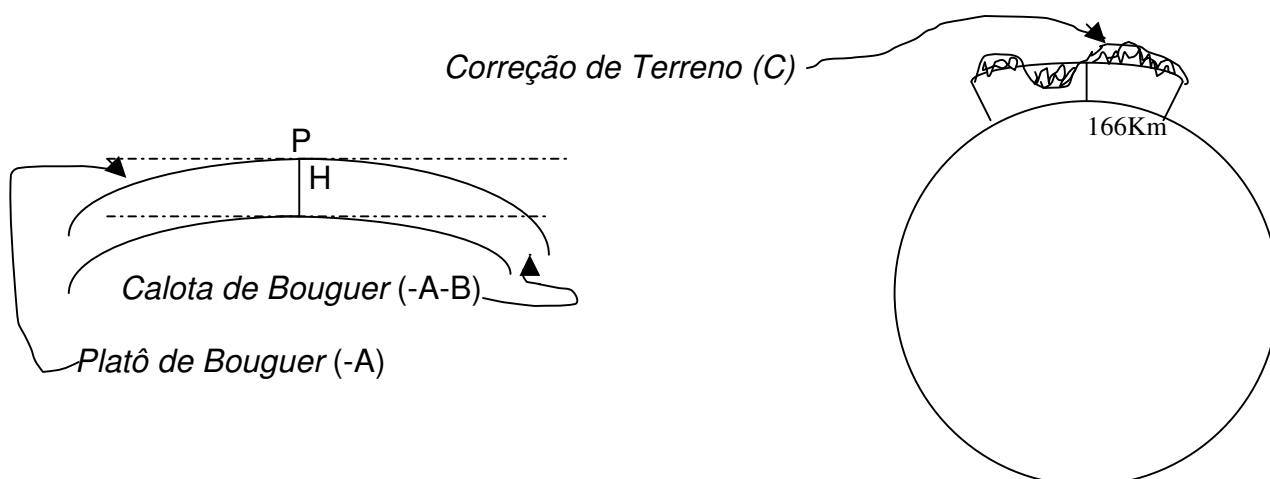


Figura 14 – Platô de Bouguer

O termo **B** da Fórmula 5.8 corresponde a diferença entre as componentes verticais da atração produzida pela *calota* e pelo *platô* de Bouguer. Prestando para “transformar” o platô numa calota.

correção de terreno

O termo **C** da Fórmula 5.8 (correção do terreno) é responsável pela “eliminação” das massas topográficas irregulares em relação à calota. Seu cálculo é executado a partir de cartas altimétricas da região vizinha à estação. a região pé dividida em *zonas* (denominadas de **zonas literais de Hayford**) são designadas

¹ igual a altitude ortométrica da estação

pelo alfabeto maiúsculo **A** pequena calota que envolve a estação gravimétrica, por **B** . . ., por **C** . . ., . . . **O**, esta representa a *zona mais afastada, com raio de 166,7 Km* e delimita a calota de Bouguer.

5.3 Reduções isostática

A isostasia postula a existência de um estado de equilíbrio na litosfera com relação às ações decorrentes da gravidade. Neste estado de equilíbrio, aos excessos de massas (exemplificando, nas montanhas) e às deficiências de massas (nos oceanos) em relação ao geóide, correspondem **massas internas de compensação**.

O equilíbrio isostático é atingido em determinadas regiões do planeta, estas regiões são denominadas de **regiões compensadas**, há regiões em que o equilíbrio isostático ainda não está completo, ou seja, a região encontra-se em fase de processamento (são as regiões sub-compensadas); ou ainda há regiões onde o equilíbrio foi ultrapassado (são as regiões super-compensadas).

5.3.1 Sistema Prat-Hayford

O sistema Prat postula a igualdade entre as massas topográficas e as *massas de compensação* que se estendem do geóide até uma determinada **profundidade de compensação**. O equilíbrio isostático é consumado pela variação de densidade do material subjacente ao geóide (sob as montanhas – excessos de massa em relação ao geóide – haveria uma deficiência de densidade e sob o leito dos oceanos – as águas oceânicas representariam uma deficiência de massa – haveria um excesso em relação ao valor médio atribuído às massas superficiais).

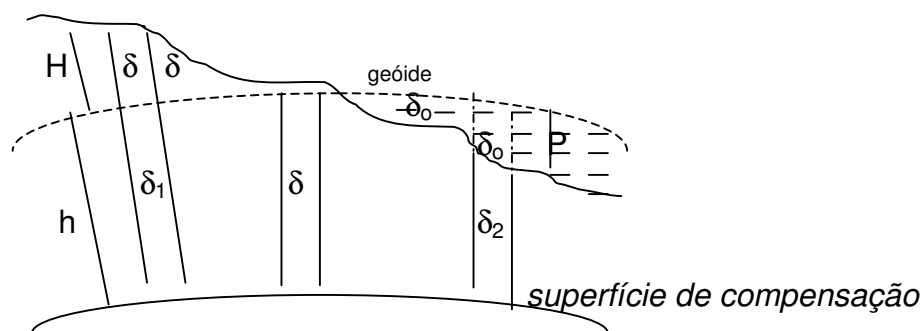


Figura 15 – Sistema Prat-Hayford

5.3.2 Sistema Airy-Heiskanen

O sistema Airy-Heiskanen postula um equilíbrio isostático baseado na igualdade de massas topográficas e as massas de compensação que seria atingido de maneira diferente daquela de Pratt. No sistema de Pratt a profundidade de compensação é constante, varia a densidade da litosfera. Já no sistema Airy a **densidade é constante** e varia a profundidade de compensação. Onde o **magma**, onde “flutua” a litosfera, seria de densidade constante. Assim sendo, nas montanhas haveria uma “raiz” que é a maior parte que “mergulha” no magma. Sob os oceanos é a “anti-raiz” que ocupa lugar de material mais leve compensando as deficiências oceânicas.

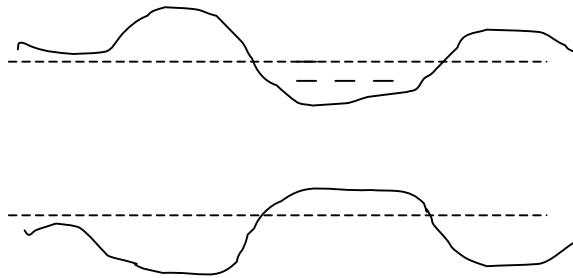


Figura 16 – Sistema Airy – Heiskanen

5.4 Efeito indireto

Resultante da eliminação das massas topográficas e compensadas, tem-se a superfície eqüipotencial da Terra fictícia, esta superfície é denominada, conforme já vimos, de *co-geóide*. Interessa-nos determinar a separação entre o co-geóide e o geóide, a correção que nos conduz a este objetivo denomina-se **efeito indireto** (C_{EI}), ou efeito de Bowie, e é obtido multiplicando-se a distância n entre as duas superfícies eqüipotenciais pelo gradiente da gravidade.

$$C_{EI} = \frac{\partial g}{\partial n} n = \frac{2g}{a} n 5.10$$

Na equação de Bruns, tem-se:

Imaginando que se pretende determinar, por nivelamento geométrico, a altitude do ponto **P**, em uma primeira situação o nivelamento foi desenvolvido a partir do lado direito da figura abaixo, na segunda situação o nivelamento deu-se a partir do lado esquerdo da citada figura. Percebe-se que os intervalos entre as superfícies eqüipotenciais, do lado direito do hipotético morro, são maiores que os intervalos das respectivas superfícies do lado esquerdo. Diante do exposto, é evidente que o mesmo ponto **P** possuirá altitudes que dependerá do caminho percorrido na execução do nivelamento, o que não é admissível em levantamentos geodésicos.

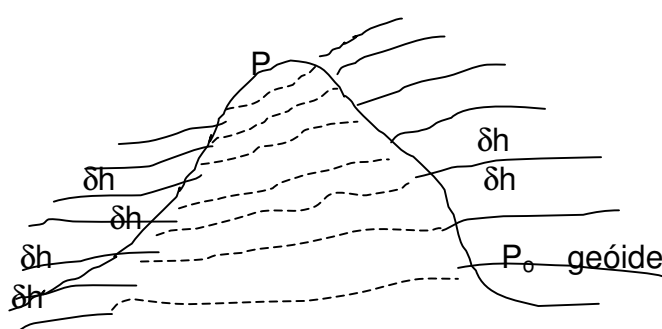


Figura 17 – Não paralelismo das superfícies eqüipotenciais

6.1 Números geopotenciais

Número geopotencial de um ponto (C_P) pertencente à superfície física da Terra é definido como a diferença entre o geopotencial W_0 do geóide e o geopotencial W_P no ponto considerado, ou seja é a diferença do potencial entre o geóide do fundamental (geóide) e o geóide do ponto. Ainda, número geopotencial é igual ao trabalho da gravidade para transportar a partícula de massa unitária do geóide ao ponto.

$$C_P = W_0 - W_P$$

6.2

$$C_P = \int_0^P g \, dz$$

O nivelamento geométrico tem sua origem nos marégrafos, que por sua vez

altitude, a saber:

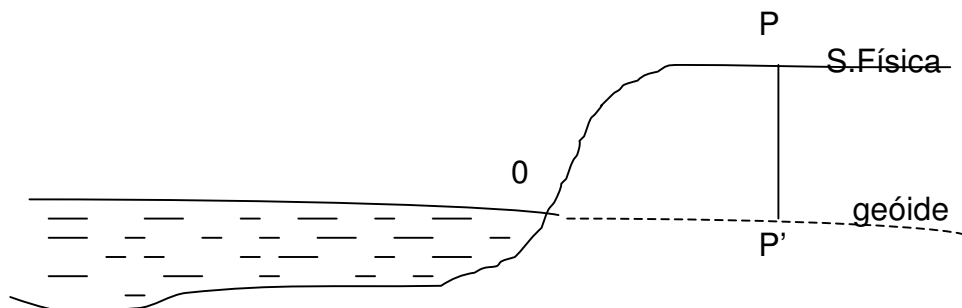


Figura 6.2 – Altitude científica

$$H_c = \frac{\sum_0^P g \Delta z}{\gamma} \quad \dots \quad 6.4$$

6.2.1 Altitude ortométrica H

No sistema de altitude ortométrica γ é definido como sendo o valor médio da gravidade verdadeira ao longo de P P', assim, tem-se:

$$H = \frac{\sum g \Delta z}{g_m} \quad \dots \quad 6.5$$

Conforme definido, γ deve ser determinado ao longo de P P', ou seja é a média da gravidade observada na superfície física da Terra e na superfície do geóide. Diante do exposto, verifica-se a impossibilidade de se obter a altitude ortométrica de um ponto. Pois é impossível a determinação da gravidade no interior da crosta terrestre. Deduz-se então que a altitude ortométrica possui apenas um cunho teórico.

O nivelamento de precisão executado em nosso país tem sido desenvolvido desacompanhado de determinações gravimétricas. Para tornar unívoca, a rede altimétrica pertencente a **Rede Fundamental de Nivelamento do Brasil** utiliza-se da **correção ortométrica** (que é a correção do não paralelismo das superfícies eqüipotenciais).

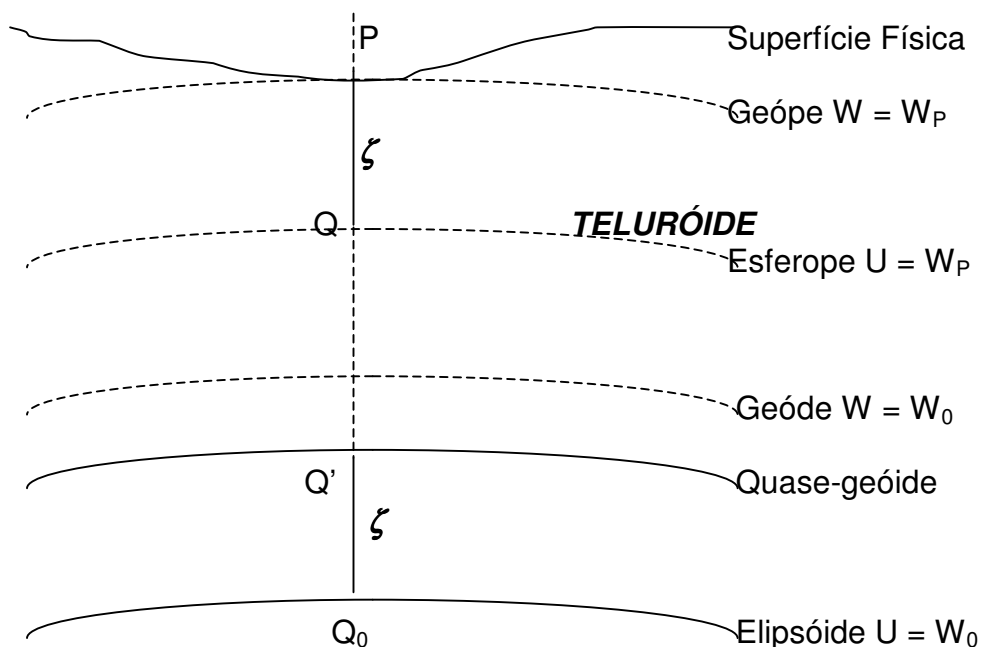


Figura 19 – Altitude normal

Na Figura 19, tem-se:

Altitude normal de P = PQ' que é igual à QQ₀.

A altitude normal é obtida quando utilizar-se na expressão 6.4 γ por:

$$\gamma_n = \gamma [1 - (1 + \alpha + m - 2\alpha \sin^2 \varphi) H^M / a + H^{M^2} / a^2] \quad . \quad . \quad . \quad 6.7$$

Onde, $m = 0,003\ 449\ 801$

6.2.5 Altitude dinâmica

A altitude dinâmica é obtida utilizando, na equação 6.4, o valor constante de γ , usualmente adota-se o valor da gravidade teórica (normal) média da região, por exemplo, utilizar o valor médio da região de γ .

Muitas das aplicações dos modelos geopotenciais, apontadas acima, são para aplicações em regiões continentais, salienta-se também que uma importante aplicação da ondulação do geóide é na área de Oceanografia, onde os dados de altitude da superfície do mar, obtidos pelos satélites altimétricos, podem ser usados nos estudos das circulações oceânicas. As extensas circulações oceânicas podem ser estudadas se forem conhecidas os longos comprimentos de ondas da ondulação do geóide. A estimativa da topografia dinâmica do oceano (separação entre a superfície do oceano e o geóide) tem sido determinada utilizando-se dos dados dos satélites Geosat e Topex/Poseidon.

O potencial gravitacional da Terra, V é representado por uma expansão harmônica esférica, onde os coeficientes do potencial podem ser determinados por várias técnicas. A determinação dos coeficientes do potencial podem ser por duas maneiras: o mais alto grau, na expansão foi estendido para melhorar os coeficientes de alto grau através do uso de dados adicionais de satélites e dados gravimétricos terrestres, conseqüentemente proporcionando um modelo de maior resolução; a acuracidade dos coeficientes são continuamente “melhorados” com inclusão de dados adicionais que melhora a “cobertura” geográfica e a acuracidade.

Até meados da década passada, mais de 30 modelos do geopotencial haviam sido desenvolvidos, baseados em diferentes aproximações. Após o lançamento do primeiro satélite artificial, os dados orbitais vêm sendo armazenados e analisados, proporcionando melhora gradativa. Os modelos mais divulgados são os da série **Smithsonian Astrophysical Observatory Standar Earth** - SAO-SE, o **Goddard Earth Model** – **Natinal Aeronautics and Space Administration** NASA – GEM, o **Ohio State University** – OSU, o **Groupe de Recherche Spatial – Institut Universität München** – GRIM e o **GeoPotential Model** – GPM. Outros modelos foram elaborados com missões específicas, tais como LAGEOS, STARLETTE, ERS-1, etc. Alguns destes modelos foram determinados a partir de dados orbitais de satélites (GEM-T1 e GEM-T2), enquanto outros combinam estes elementos com observações gravimétricas e altimétricas (OSU-86, OSU-89, OSU91A, GPM1 e GPM2). Em função da posição geográfica, a estimativa da acurácia global dos parâmetros derivados de tais modelos podem variar de modelo para modelo.

7.3.1 **Modelo OSU91A**

O modelo OSU91A foi desenvolvido pela **Ohio State University** no ano de 1991. Os coeficientes do grau de 2 à 50 foram gerado a partir do modelo GEM-T2 e de anomalias de gravidade médias em blocos de 30' x 30' e de dados altimétricos da superfície dos oceanos gerados pelo Geosat. As anomalias da gravidade terrestres foram combinadas com anomalias estimadas. Os coeficientes de grau 51 à 360 foram obtidos a partir do modelo GEM-T2 combinados com anomalias da gravidade espaçadas de 30'. As anomalias ajustadas resultantes da combinação acima, foram então utilizadas na determinação do conjunto completo de coeficientes até grau e ordem 360, bem como do respectivo desvio padrão para cada coeficiente, obtidos do ajustamento por mínimos quadrados. O desvio padrão estimado (1 sigma) para valores das ondulações geoidais no OSU91A são da ordem de 26 cm nas áreas oceânicas; 38 cm em áreas terrestres com uma boa cobertura de dados da gravidade; 56 cm em áreas terrestres com fraca cobertura de dados da gravidade; e 200 cm em área terrestre onde não existem dados da gravidade.

7.3.2 **Modelo EGM96**

Nos últimos 5 anos, tem havido uma soma de esforços envolvendo a colaboração, análises e recursos do **National Imagery and Mapping Agency** – NIMA, da NASA **Goddard Space Flight Center** – GSFC e da **Ohio State University**. Como resultado desta junção de esforços, tem-se o novo modelo global do campo gravitacional da Terra denominado **Earth Gravitational Modelo 1996** – EGM96. A forma do modelo EGM96 é uma expansão do potencial gravitacional (V). Este modelo é completo até grau e ordem 360, contendo 130 676 coeficientes.

O desenvolvimento do EGM96 deu-se com uso dos dados da gravidade do NIMA e dados de satélites da NASA/GSFC. A NIMA proporcionou dados da anomalia da gravidade de todo o globo terrestre de 30' e 1° , esta anomalia foram determinada a partir de pontos de anomalia da gravidade de 5' X 5' obtidos do arquivo de altura do geóide do GEOSAT *Geodetic Mission*. O processamento do Geosat foi executado utilizando-se da técnica de colocação por mínimos quadráticos para estimar a anomalia da gravidade 30' x 30', com suas respectivas precisões.

A participação do GSFC envolveu muitas fases, incluindo a determinação de órbita de satélites a partir de dados de rastreamento de, aproximadamente, 30 satélites, incluindo os satélites do SLR, TDRSS e GPS. Nesta fase resultou no EGM96S

(modelo com base apenas nos dados dos satélites do EGM96 para grau e ordem 70).

No desenvolvimento do modelo para o grau e ordem 70, foi incorporado os dados dos satélites altimétricos do TOPEX/POSEIDON, ERS-1 and GEOSAT juntamente com o EGM96S. A maior contribuição dos dados usados pelo GSFC incluiu novas observações do Lageos, Lageos-2, Ajisai, Saterlette, Stella, TOPEX, GPSMET, GEOS-1 and GEOSAT.

Finalmente, o GSFC desenvolveu o modelo de alto grau EGM96 utilizando-se da combinação de dados até grau e ordem 70 (dados de satélites EGM96S, dados de altimetria e dados terrestres), para a determinação dos coeficientes do grau e ordem de 71 à 359 utilizou-se da solução de bloco diagonal, e para o grau e ordem 360 utilizou-se da solução por quadratura.

7.4 N a partir do GPS/nivelamento

O desenvolvimento do nivelamento geométrico, usualmente realizado ao longo de rodovias (lugares de fácil acesso) nos proporcionam a altitude ortométrica (assunto contido no capítulo 04). Os pontos da superfície terrestre com altitude conhecidas são denominados de **R**referencia de **N**ível – RN.

No processamento, a determinação da coordenadas geodésicas utilizando-se do sistema GPS nos proporcionam coordenadas retangulares (X, Y, Z) referenciadas ao sistema ao sistema WGS84 (isto quando utilizado as efemérides transmitidas). Quando utiliza-se as coordenadas precisas, deve-se ter em mente que as efemérides podem estar em outro sistema de referência, por exemplo no ITRF. Estas coordenadas retangulares podem ser transformadas para outros sistemas de referências, e a partir destas, calcular as coordenadas geodésicas elipsoidais (latitude, longitude e altitude geométrica).

A realização do rastreamento dos satélites do sistema GPS sobre as RN, nos propicia a determinação da ondulação do geóide. Assim, em uma linha formada por duas RN com altitude geométrica conhecida, pode-se interpolar a ondulação do geóide em pontos desta linha, ou próximo à mesma.

Featherstone, W. E., apresenta o modelo:

$$H_X = H_A + \Delta h_{AX} - \frac{l_{AX}}{l_{AB}} \Delta N_{AB} \quad 7.8$$

Onde,

H_X – representa a altitude ortométrica do ponto a ser interpolado;

H_A – altitude ortométrica da RN, situada em A;

Δh_{AX} – diferença de altitudes geométricas do ponto a ser interpolado e RN, situada em A;

l_{AX} – distância entre o ponto a ser interpolado e a RN, em A;

l_{AB} – distância entre as RN, situadas em A e em B; e

ΔN_{AB} – diferença de ondulações geoidais nas RN em A e em B.

No caso em que se deseja a interpolação de vários valores da ondulação do geóide, em uma área, pode-se determinar um plano (equação 7.9) ou uma poli-superfície (equações de 7.10 à 7.12, assim, conhecendo-se pelo menos três RRNN com altitudes geométricas determinadas, sendo não co-lineares, pode-se determinar a ondulação geoidal destes pontos, e a partir destas determinar um plano, ou poli-superfície), que representa o geóide nas RN. Estendendo-se o conceito de interpolação, descrito acima, para regiões que possuam números maior de pontos com ondulação do geóide conhecidos pelo nivelamento associado ao GPS, pode-se utilizar modelos matemáticos que representam o geóide na região em apreço. Há autores que caracterizam o geóide obtido por este procedimento de **geóide geométrico**, ainda, por se tratar da determinação do geóide em uma específica região, há autores que o designam de **geóide local**. FIEDLER, J. apresenta modelos matemáticos (modelos de interpolação) que representam o geóide na região em apreço, conforme segue:

$$z_i = aE_i + bN_i + c \quad 7.9$$

$$z_i = aE_i + bN_i + cEN_i + d \quad 7.10$$

$$z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e \quad 7.11$$

$$z_i = aE_i + bN_i + cN_iE_i + dE_i^2 + eN_i^2 + f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7.12$$

Onde:

z_i – representa a ondulação do geóide na RN;

E_i, N_i – coordenadas UTM das RN $_i$; e

a, b, c, d, e – são os parâmetros a serem determinados no ajustamento.

7.5 Determinação de N a partir do GPS/nivelamento associado aos modelos geopotenciais

Os modelos do geopotencial tem a capacidade de representar, com fidelidade, os longos comprimentos de ondas do campo da gravidade terrestre. Em levantamentos de áreas, relativamente pequenas, é o caso da presente pesquisa, há a necessidade da representação dos curtos comprimentos de onda. A determinação da altitude com GPS esses pontos com referência de nível conhecidas, permite a determinação da ondulação do geóide com fidelidade.

A determinação da ondulação do geóide a partir do rastreamento GPS em pontos pertencentes à rede fundamental de nivelamento do Brasil RN, nos possibilita calcular a “real” ondulação do geóide, os modelos do geopotencial nos fornece a ondulação do geóide do modelo. A diferença entre as ondulações geoidais do modelo com as ondulações determinadas com GPS/nivelamento, nos permite o cálculo da “separação” entre o modelo e o efetivo geóide; levado este conceito de diferenças de ondulações geoidais (modelo – GPS/nivelamento) às várias RRNN existentes em uma região, pode-se, com auxílio de uma das equações 3.97 à 3.100 e do método dos mínimos quadrados (m.m.q.), determinar um plano (equação 3.97) ou uma poli-superfície (uma das equações 3.98, 3.99 ou 3.100) que representará um “modelo matemático” da separação existente entre o geóide, naquela região, e o modelo geopotencial.

Assim, o procedimento para a determinação da ondulação do geóide pelos modelos do geopotencial associado ao GPS/nivelamento, deve-se primeiramente determinar a ondulação do geóide pelo modelo do geopotencial, em um ponto

qualquer de interesse pertencente à região, aplica-se o modelo matemático (determinado pelo m.m.q.) ao ponto de interesse; determinando assim a separação entre os modelos matemático e geopotencial, soma-se esta quantidade ao valor determinado pelo modelo geopotencial, obtendo assim a ondulação do geóide a partir do GPS/nivelamento associado ao modelo do geopotencial.

Esquemáticamente, a Figura 22 nos mostra a situação da determinação da ondulação do geóide por GPS/nivelamento associado aos modelos dos geopotencial.

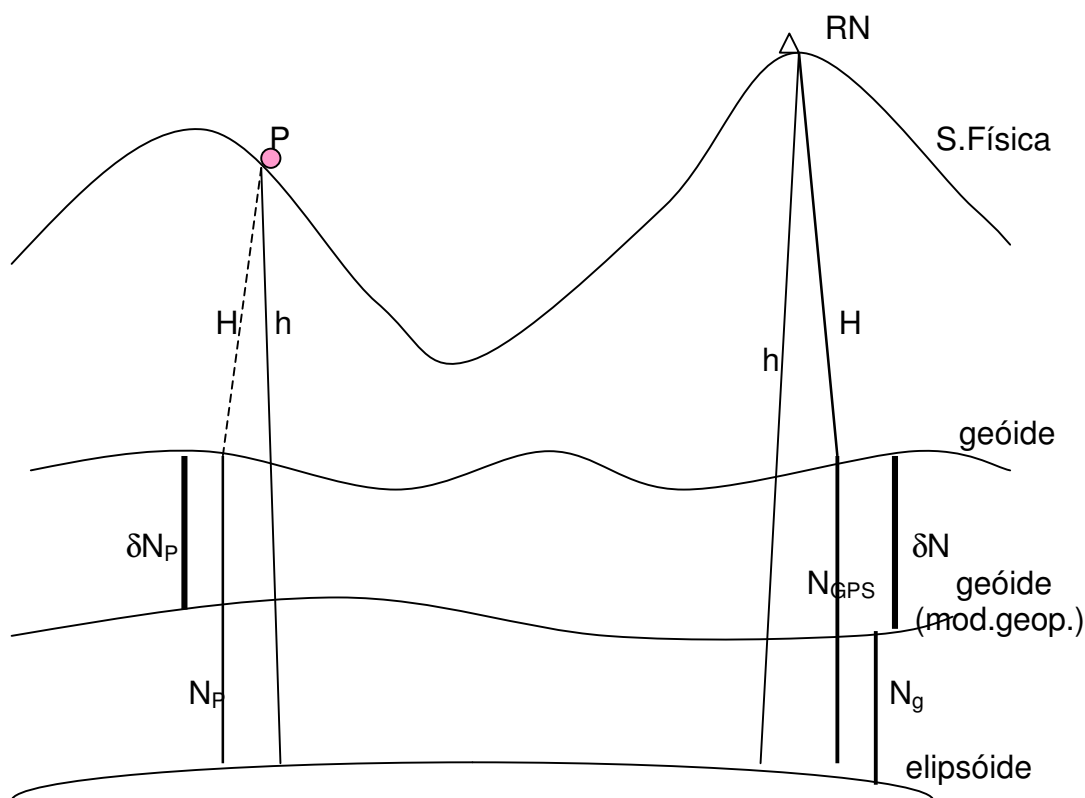


Figura 22 - Determinação da ondulação do geóide pelo modelo do geopotencial associado ao GPS/nivelamento.

Onde:

- . H – Altitude ortométrica;
- . h – Altitude geométrica;
- . N_g – Ondulação do geóide obtida pelo modelo do geopotencial;
- . N_{GPS} – Ondulação do geóide obtida pelo GPS/nivelamento; e

8 BIBLIOGRAFIA

- ARANA, J. M. (2000) **O Uso do GPS na Elaboração de Carta Geoidal**. Tese de Doutorado. Departamento de Geomática. Setor de Ciências da Terra. Universidade Federal do Paraná UFPR. Curitiba.
- AYHAN, M.E. Geoid determination in Turkey (TG-91). **Bulletin Géodésique**. Springer-Verlag. Berlin. v 67. n 1. 1993.
- BIRARD, G., SANTARSIERO, D., TUFILLARO, D., SURACE, L. Setting-up local "mapping geoids" with the aid of GPS/LEV Traverses Application to the geoids of Sardinia and Calabria. **Journal of Geodesy**. Springer-Verlag. Berlin. v 70. n 1-2. 1995.
- BLITZKOW, D. **O Problema de valor de contorno da Geodésia: resultados práticos para a América do Sul**. Tese de Livre Docência. Departamento de Engenharia de Transporte, Escola Politécnica, USP. São Paulo. 1996.
- BONFORD, G. **Geodesy**, 2ed., London, Oxford University Press, 1962.
- FIELDER, J. Orthometric heights from Global Positioning System. **Journal of Surveying Engineering**. New York. v 118. n 3. 1992.
- FORSBERG, R. Terrain effects in geoid computations. **International School for the Determination and use of the Geoid**. Milan. n 1, 1994.
- GEMAEL, C. **Marés Terrestre**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Departamento de Geociências. Setor de Tecnologia. Universidade Federal do Paraná – ufpr. CURITIBA. 1986
- GEMAEL, C. **Geodésia Celeste: Introdução**. Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná UFPR. Curitiba. 1991.
- _____. **Determinação da gravidade em Geodésia**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Departamento de Geociências. Setor de Tecnologia. Universidade Federal do Paraná - UFPR. Curitiba. 1985.
- _____. **Introdução à Geodésia Física**. Editora da Universidade Federal do Paraná . Curitiba. 1999.
- HEISKANEN, W. A., MORITZ, H. **Physical Geodesy**. Depointed Institute of Physical Geodesy, Technical University, Gras, Australia, 1979.
- KRUEGER, C. P., ARANA, J. M., CORDINI, J., FERREIRA, L. D. D., CAMARGO, P. O., FABRI, S. M. **Teoria do Potencial**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Departamento de Geociências. Setor de Tecnologia. Universidade Federal do Paraná UFPR. Curitiba. 1994.

- KUANG, S., FIDIS, C., THOMAS, F. **Modeling of the local geoid with GPS and leveling: A case study.**
- LI, Y. C. e SIDERIS, M. G. Minization and estimation of geoid undulation errors. **Bulletin Géodésique.** Springer – Verlag. v. 68. 1994.
- MARTINEC, A., VANICEK, P., MAINVILLE, A., VÉRONNEAU, M. The effect of lake water on geoidal height. **Manuscripta Geodaetica.** Springer-Verlag. Berlin. 1995.
- PAVLIS, N.K. Development Applications of Geopotential Models. **Escola de Geóide.** Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, Rio de Janeiro. 1997.
- PESSOA, L. M. da C. **Análise comparativa de Modelos Geoidais na Bacia do Paraná: contribuição à Determinação do Geóide.** Seminário Apresentado ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas _ UFPR. Curitiba, 1994.
- PRADO, W. S. **Determinação das ondulações do geóide através de harmônicos esféricos.** Dissertação de Mestrado em Ciências Espacial. INPE. 1981.
- RAPP, T. H. and NEREM, R. S. **A joint GSFC/DMA project for improving the model of the Earth's gravitational field.** Ohio.
- SÁ, N. C. de, MOLINA. E. C. **XVII Congresso Brasileiro de Cartografia.** O geóide gravimétrico no Estado de São Paulo: resultados preliminares. Instituto Astronomico e Geofísico. Universidade de São Paulo - IAG/USP. São Paulo. 1995.
- TORGE, W. **Geodesy.** Berlin. Walter de Gruyter. 1980.
- VANICK, P. e KRAKIWSKY, E. J. **Geodesy: The concepts.** NHPC - Amsterdam, New York, Oxford. University of New Brunswch. Canadá. 1982.