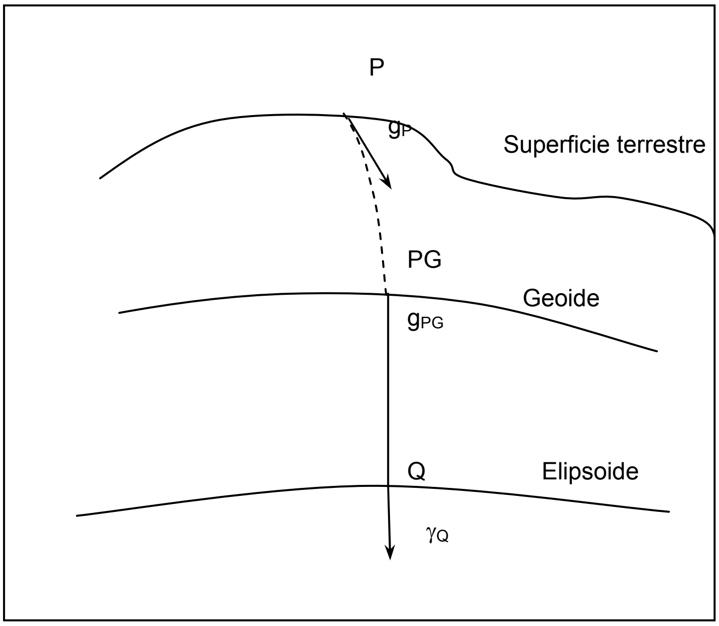
4.1 ANOMALÍAS DE LA GRAVEDAD y DESVIACIÓN DE LA VERTICAL

El tema que abordamos ahora constituye una de las herramientas principales en gravimetría, ya que las anomalías de la gravedad constituyen un dato básico para el análisis y resolución de la forma de la Tierra, teniendo también una amplia aplicación en el campo de las prospecciones gravimétricas en el estudio de la corteza terrestre principalmente.



En el gráfico observamos los diferentes valores y direcciones de la gravedad en cada superficie. El único valor que nosotros podemos conocer y medir es el g_P sobre la superficie terrestre, obteniéndose el valor y dirección de g_{PG}, el valor de la gravedad sobre el geoide, mediante lo que se conoce por reducciones de la gravedad. El valor y dirección de γ_0 simplemente se calcula mediante las ecuaciones ya vistas.

Si consideramos los valores de la gravedad g_{PG} y los comparamos con el valor teórico de la gravedad sobre el elipsoide γ_Q en el punto Q, la diferencia entre ambos valores se conoce como anomalía de la gravedad, este valor va asignado a la superficie del geoide,

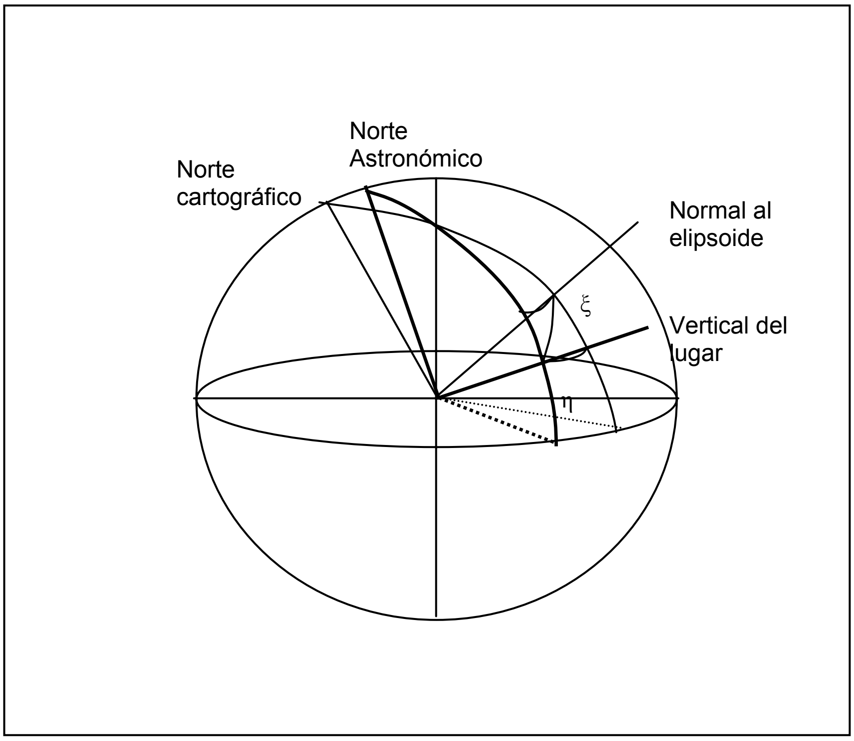
$$\Delta g = g_{PG} - \gamma_Q \qquad (4.1)$$

al punto PG.

La gravedad y la gravedad normal son vectores quiere decir esto que la resta de ambos también será un vector, el cual lleva asociado un modulo, la diferencia de este es tan pequeña que se normalmente para resolver el modulo se suele considerar

$$|\Delta g| = |g| - |\gamma| \qquad (4.2)$$

El vector de la anomalía de la gravedad se considera la desviación relativa de la gravedad, ya que este valor en grados, cuantifica la diferencia entre las direcciones de la gravedad o línea de la plomada (latitud y longitud astronómica, obtenida por métodos astronómicos) y la dirección de la gravedad normal (latitud y longitud geodésica).

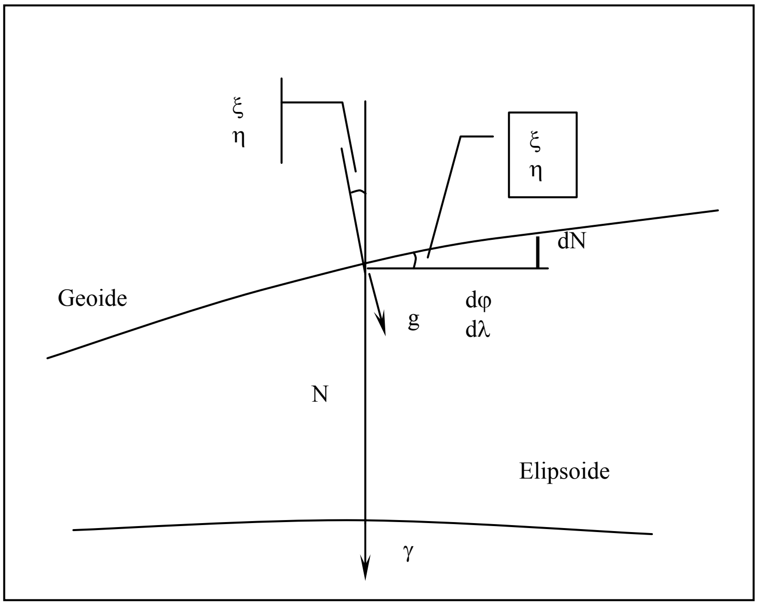


Esta desviación relativa de la vertical se expresa por las componentes en la dirección N-S y E-W. Estas componentes vienen dadas en función de las coordenadas astronómicas reducidas al geoide (Φ,Λ) y por las geodésicas (φ,λ).

$$\xi = \Phi - \varphi \qquad (4.3)$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda)\cos\varphi \qquad (4.4)$$

A través de las componentes de la desviación relativa de la vertical somos capaces de resolver la forma del geoide, en la gráfica vamos a representar la posición relativa de una sección geoide-elipsoide bien sea en la dirección de un meridiano o de un paralelo y



las relaciones geométricas entre sus normales.

En este gráfico se puede extraer las relaciones:

$$dN = sen\xi \, d_l\varphi \approx \xi \, d_l\varphi = \xi \, R \, d\varphi \qquad (4.5)$$

$$dN = sen\eta \, d_l\lambda \approx \eta \, d_l\lambda = \eta \, R \, d\lambda \qquad (4.6)$$

Donde dN es la variación de la ondulación del geoide, η y ξ son las componentes de la desviación relativa de la vertical, dlλ y dlφ son elementos diferenciales lineales de paralelo y meridiano.

Reordenando las ecuaciones convenientemente

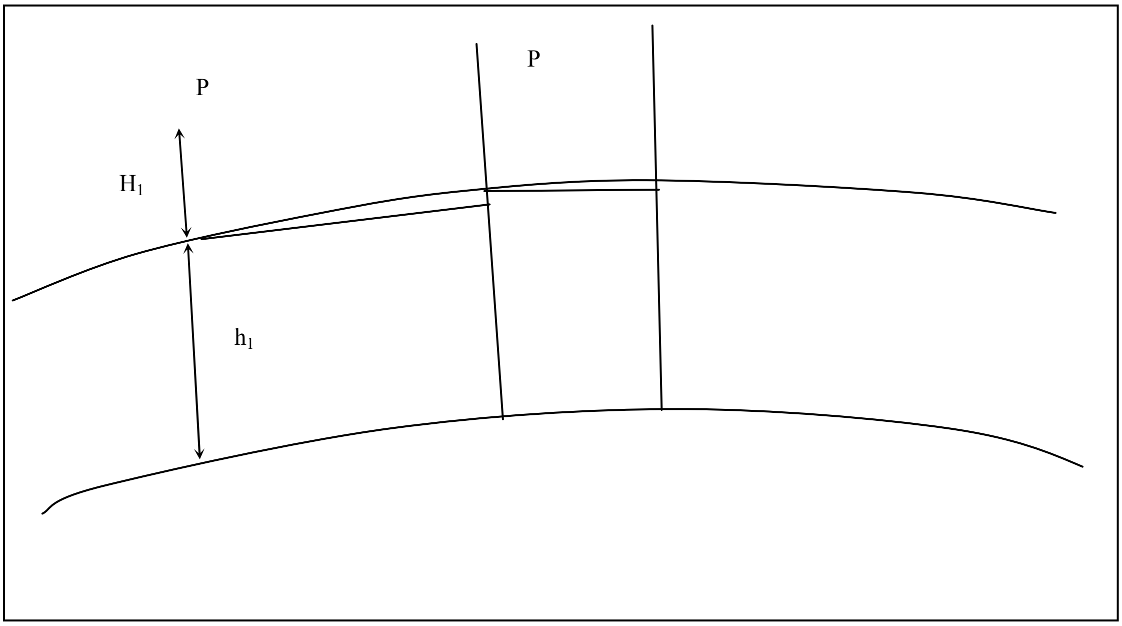
$$\xi = \frac{1}{R}\frac{dN}{d\varphi} = -\frac{1}{R}\frac{\partial N}{\partial \varphi} \qquad (4.7)$$

El signo menos en el tercer término aparece para indicar que ángulos positivos indican dN negativos en la dirección norte.

Aplicando la misma reordenanción en η

$$\eta = \frac{1}{R}\frac{dN}{d\lambda} = -\frac{1}{R}\frac{\partial N}{\partial \lambda} \qquad (4.8)$$

Mediante la utilización de estas fórmula a partir de un punto con N conocida somos capaces de obtener la forma del geoide de un area o zona, o la altitud de un punto a partir de la altitud elipsoidal. Esta clase de cálculo se conoce como nivelación astrogeodésica el cual se utilizaba antaño para resolver el geoide calculándose los dN en



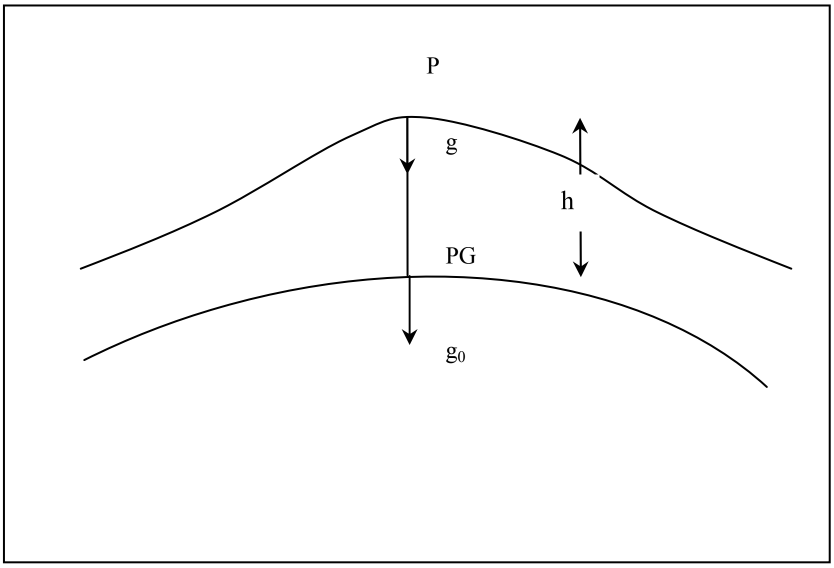
la dirección de los meridianos y paralelos, obteniéndose una malla de puntos de los cuales se conocía N. Para resolver la ondulación del geoide de un punto que se halle en la nivelación (P2) basta aplicar

$$h_1 = N_1 + H_1 \qquad (4.9)$$
$$N_2 = N_1 + dN_1 \qquad (4.10)$$
$$h_2 = N_2 + dN_2 \qquad (4.11)$$

Para resolver la N de cualquier punto bastara con interpolar respecto a los puntos más cercanos. Se obtenía el geoide sin necesidad de observables gravimétricos, en la actualidad la mayoría de geoides se obtienen a partir de datos gravimétricos, aunque las ecuaciones de la desviación relativa de la vertical se sigue utilizando en el cálculo del geoide como ecuaciones complementarias.

4.1 REDUCCIONES GRAVIMÉTRICAS.

Una vez hemos definido el concepto de anomalía pasamos, en el cual hemos visto que se hace necesario conocer el valor de la gravedad normal de un punto sobre el elipsoide y el valor de la gravedad sobre el geoide, este último valor es el que se mide sobre el terreno, aunque difícilmente esta medición se va ha realizar sobre el geoide, ya que los valores de la gravedad se obtienen por encima de la superficie física de la Tierra. En este capítulo veremos y justificaremos como extrapolar los valores de la gravedad obtenidos sobre la superficie de la Tierra a la superficie del Geoide, estas operaciones son conocidas como reducciones de la gravedad.



Corrección aire libre

La primera reducción que vamos a considerar es la que tiene en cuenta el efecto de la altura h, el hecho de que se observe la gravedad alejada de la superficie del geoide repercute en un valor de la gravedad más bajo que el que se observaría sobre el geoide, por todos es sabido que conforme nos alejamos de las masas que generan el campo de la gravedad se produce una disminución del valor de la gravedad. Vamos a resolver como varia la gravedad en función de h, y restauraremos el efecto provocado en la gravedad el hecho de haberse medido en P (g), pudiendo obtenerse finalmente g_0.

Este problema se puede abordar mediante el teorema de Taylor, donde vamos a calcular el valor de la función g_0 conociendo el valor de la gravedad en un punto cercano P (g).

Para lo cual partimos de que el valor de la gravedad en un punto vecino (g_P) a g_0 es igual al valor de g_0 más la variación de la función (en la dirección de variación) multiplicada por el incremento de variación.

$$g_P = g_0 + h\frac{\partial g}{\partial h} \qquad (4.12)$$

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial g}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{GM}{l^2}\right) \qquad (4.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{GM}{l^2}\right) = -\frac{2GM}{l^3} \qquad (4.14)$$

Siendo $\frac{\partial g}{\partial h}$ la variación de la función en la dirección de h, esta la podemos aproximar por la variación de la función en la dirección de *l* (2.12).

Quedando finalmente la ecuación (4.12)

$$g_0 = g_p + \frac{2GM}{l^3}h \qquad (4.15)$$

Siendo g_0 el valor calculado de la gravedad sobre el geoide sin signo, g_P el valor observado de la gravedad sin signo y h la altitud de P. El valor del segundo termino de la igualdad derecha de (4.8) se conoce como corrección aire libre C^{AL}, sustituyendo valores obtenemos

$$C^{AL} = 3.086h \qquad (4.16)$$

donde h viene dado en m y las unidades de la corrección en μm s^{-2}. En el caso que el punto se hallara por debajo del nivel del geoide, observamos que la corrección seria negativa.

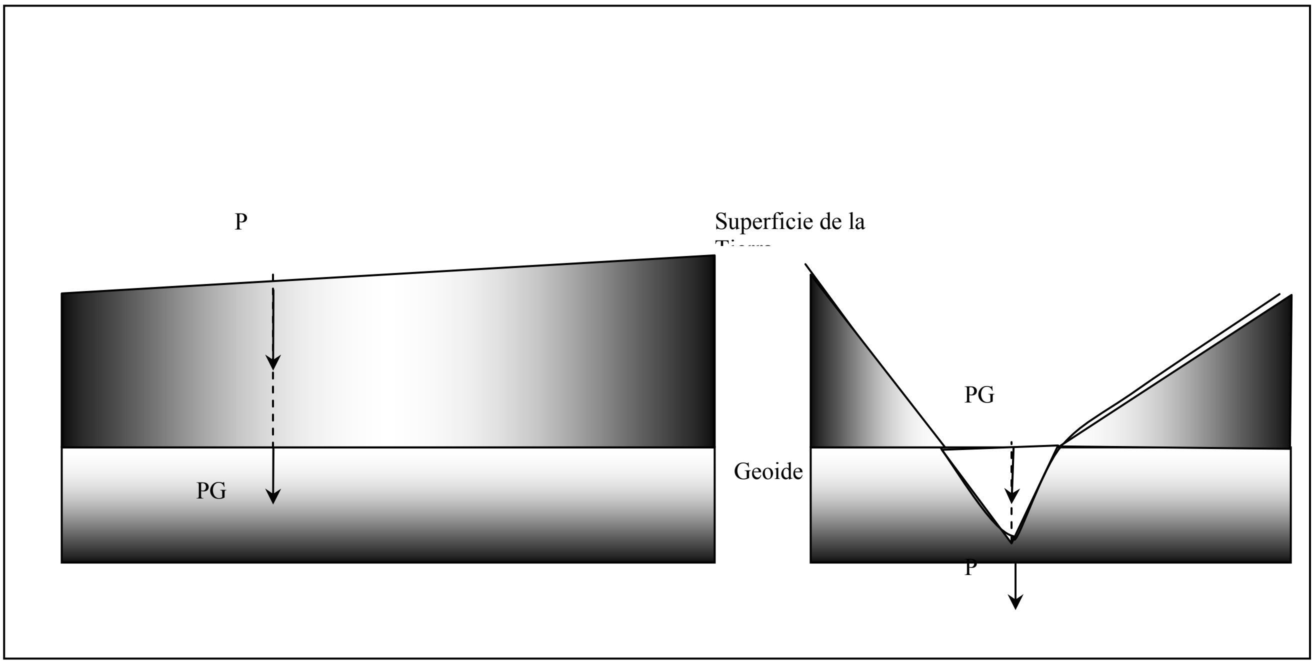
$$\Delta g^{AL} = g + 3.086h - \gamma \qquad (4.17)$$

En el caso que calculásemos anomalías de la gravedad con valores de la gravedad únicamente corregidos por corrección aire-libre obtendríamos unos valores conocidos como anomalías aire-libre o de Faye.

Corrección por capa intermedia o de Bouguer.

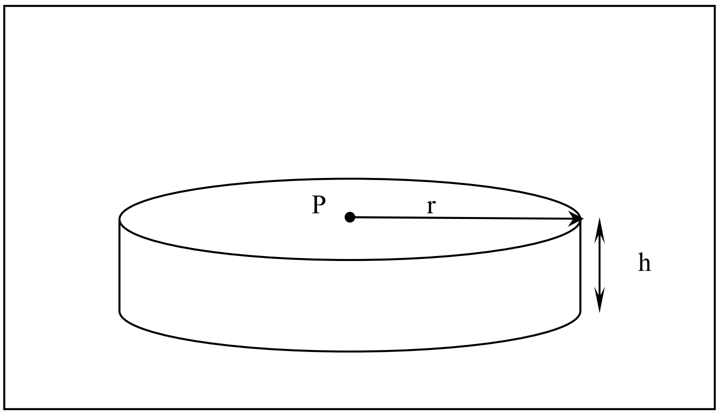
En el punto anterior hemos considerado la corrección por la distancia existente entre el punto P y PG, una vez aplicada la corrección, conocemos la gravedad que tiene el punto en el geoide, pero dicho punto no se encuentra en el aire, si no que existe una capa de terreno entre el punto y el geoide, esta masa cuando se realiza la medición sobre el terreno se halla presente ejerciendo además una influencia sobre los valores de la gravedad medidos.

Nosotros queremos obtener valores de la gravedad sobre el geoide, sin interferencia de ningún tipo de masa que se halle por encima del geoide, esto implica eliminar la



influencia que ejerce esta capa. En este caso el carácter de la corrección tiene signo negativo, ya que la masa que se halla por debajo del punto ejerce una fuerza extra, que se suma a la ejercida por la masa del geoide.

En el caso que el punto se halle por debajo del geoide, nos encontramos con el caso contrario y es que observaríamos que la deficiencia de masa entre el punto y el geoide resulta en unos valores más bajos de los valores de la gravedad, por tanto nos encontramos en el caso contrario, habría que cuantificar la influencia provocada por ese vacío y añadírsela.



Veamos como calcular la influencia generada por este exceso o deficiencia de masa entre el punto y el geoide. Un método sencillo es asimilar esta capa de masa por una lámina de espesor h, con lo cual para realizar esta corrección tendríamos que calcular la influencia generada por esta lámina plana. La corrección se obtiene considerando la influencia generada por un cilindro con radio infinito que hace la función de la lámina plana, quedando la expresión final del cálculo de la influencia de la gravedad generado por este cilindro

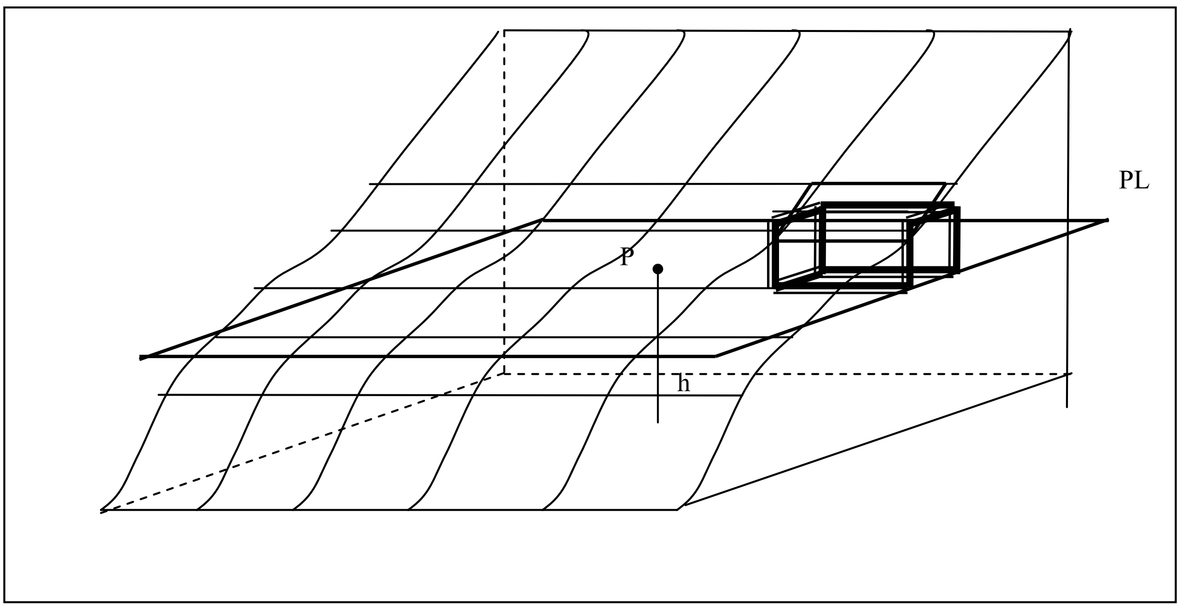
$$C^B = 2\pi G\rho h E^{-3} ug(\mu ms^{-2}) \qquad (4.11)$$
$$C^B = 0.4191\rho H(\mu ms^{-2})$$

Siendo ρ la densidad media en g/cm^3 de la capa considerada, h la altura del punto en m y la corrección viene dada en μms^{-2}.

La corrección de Bouguer puede ser más refinada por la consideración de una lámina esférica así como de anomalías en el valor de la densidad.

Corrección por topografía.

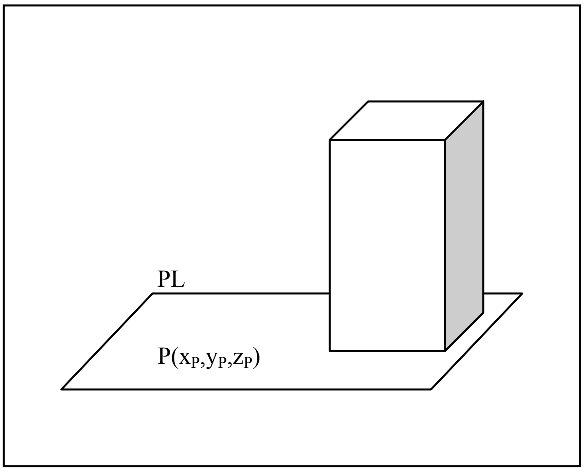
Ya hemos visto como las masas existentes entre el punto P y el geoide tienen una influencia sobre la gravedad medida en P, es lógico pensar que el resto de las masas que se hallan alrededor del punto sobre el cual medimos la gravedad ejercerán también influencia sobre esta medida, con lo cual buscaremos de que forma vamos eliminar esta influencia, cabe recordar que nosotros estamos buscando el valor de la gravedad sobre el geoide que es como se define la anomalía de la gravedad, y todas las reducciones que hemos visto hasta ahora tienen como objeto ir eliminado el efecto de la posición y de las masas que ejercen una variación de los valores de la gravedad respecto como nosotros la obtendríamos si la observásemos sobre el mismo geoide sin ninguna masa por encima del geoide ni en la vecindad.



En la gráfica se representa el terreno y como base la superficie del geoide, y sobre el terreno se halla el punto P. La corrección aire-libre traslada el valor de la gravedad medida sobre P, la corrección bouguer elimina la influencia de la masa que existe entre el plano PL y el geoide, aunque como se puede observar, hay zonas por debajo del plano PL en las cuales no existe masa pero en la corrección Bouguer no existe ese refinamiento, si no que simplemente consideramos que existe masa. En la corrección por topografía vamos a eliminar la influencia generada por no tener en cuenta en la corrección Bouguer que en algunas zonas no existe masa. La corrección Boguer tiene carácter negativo, esto quiere decir que la corrección por topografía en estas zonas tendrá carácter positivo, debido que la corrección Bouguer ha eliminado una influencia que no existía y en la corrección por topografía vamos a restaurarla sumándola.

Otro efecto que corrige la corrección por topografía como ya hemos comentado en un principio es el efecto de atracción producido por las masas que se hallan por encima del punto P, en el caso de no tenerse en cuenta esta corrección la gravedad reducida tendría un valor menor ya que la masa que se halla por encima del punto realiza una atracción contraria al producido por la "Tierra" ya que esta se halla por encima del punto, quiere decir esto que en este caso el signo de la corrección también será positivo.

El carácter positivo de las correcciones por las masas superiores y la indirecta provocada por el poco refinamiento de la corrección de Bouguer, establece que se realicen de forma conjunta.



El cálculo de las influencias se realiza mediante prismas, se calcula la influencia generada por las masas que se hallan por encima las cuales se aproximan por prismas, cuya base se halla sobre el plano PL y la altura del prisma viene por la altura media del terreno donde se halla el prisma.

En el caso de refinamiento de Bouguer nos encontraremos con un prisma invertido y una "profundidad" igual a la distancia que existe entre el plano PL y la superficie media del terreno.

La influencia generado por un prisma se aproxima por

$C^T = \sum_{m,n=1}^{N} c^T$ **siendo N el número de filas y columnas de la reticula**

$$c^T = \sum_{i,j,k=1,2} (-1)^{i+j+k-1} f(x_i, y_j, z_k) \qquad (4.12)$$

$$f(x_i, y_j, z_k) = G\rho \left\{ x \ln\left[(y+r) / \sqrt{x^2+z^2} \right] + y \ln\left[(x+r) / \sqrt{y^2+z^2} \right] + z \tan g^{-1}(xy/zr) \right\}$$

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2}.$$

Cada una de las correcciones vistas en el capitulo se deben de aplicar a los valores de la gravedad observados en P para poder obtener las anomalías.

$$\Delta g = g_{PG} - \gamma_Q \qquad (4.1)$$

En el caso que aplicásemos únicamente a los valores de g_P la corrección aire libre obtendríamos lo que se conoce por anomalía aire libre

$$\Delta g^{AL} = g_P + C^{AL} - \gamma_Q$$

Si aplicamos la corrección de Bouguer obtenemos las anomalías de Bouguer

$$\Delta g^B = g_P + C^{AL} - C^B - \gamma_Q \qquad (4.13)$$

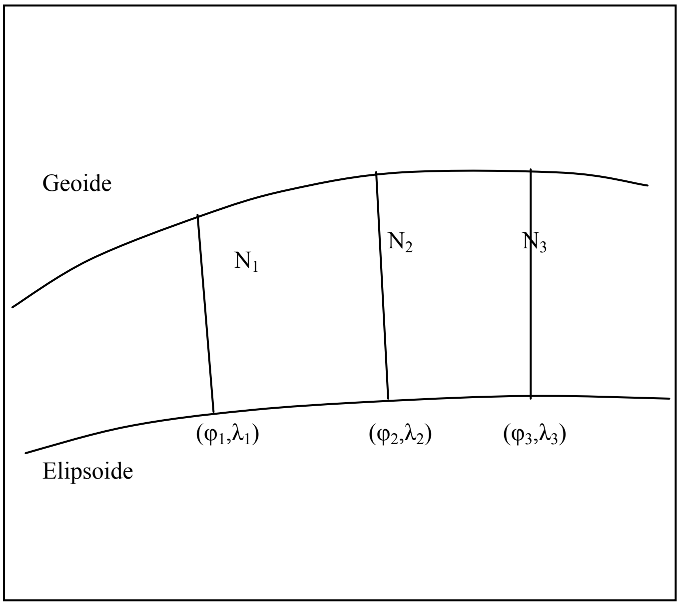
Finalmente aplicando todas las correcciones obtendríamos anomalías

$$\Delta g = g_P + C^{AL} - C^B + C^T - \gamma = g_{PG} - \gamma_Q \qquad (4.14)$$

Las anomalías de la gravedad vistas constituyen una importante herramienta para el análisis de la composición de la Tierra así como de su forma. Esta importancia se puede apreciar casi intuitivamente, por el hecho de estar comparando valores teóricos de la gravedad, los cuales constituyen un marco de referencia para una Tierra estandar con una composición por capas homogéneas, si al reducir los valores de la gravedad sobre el geoide que tiene el mismo valor potencial que el de la Tierra no se obtienen valores parecidos, implica que la composición de la Tierra en esta zona no es estándar como esperábamos, y si en la vecindad observamos que los valores de las anomalías presentan cierta tendencia es que esta heterogeneidad es mayor, porque nuestras anomalías esperadas deberían ser valores alrededor de 0 (población normal con una media de 0).

DETERMINACIÓN DEL GEOIDE. FÓRMULA DE STOKES

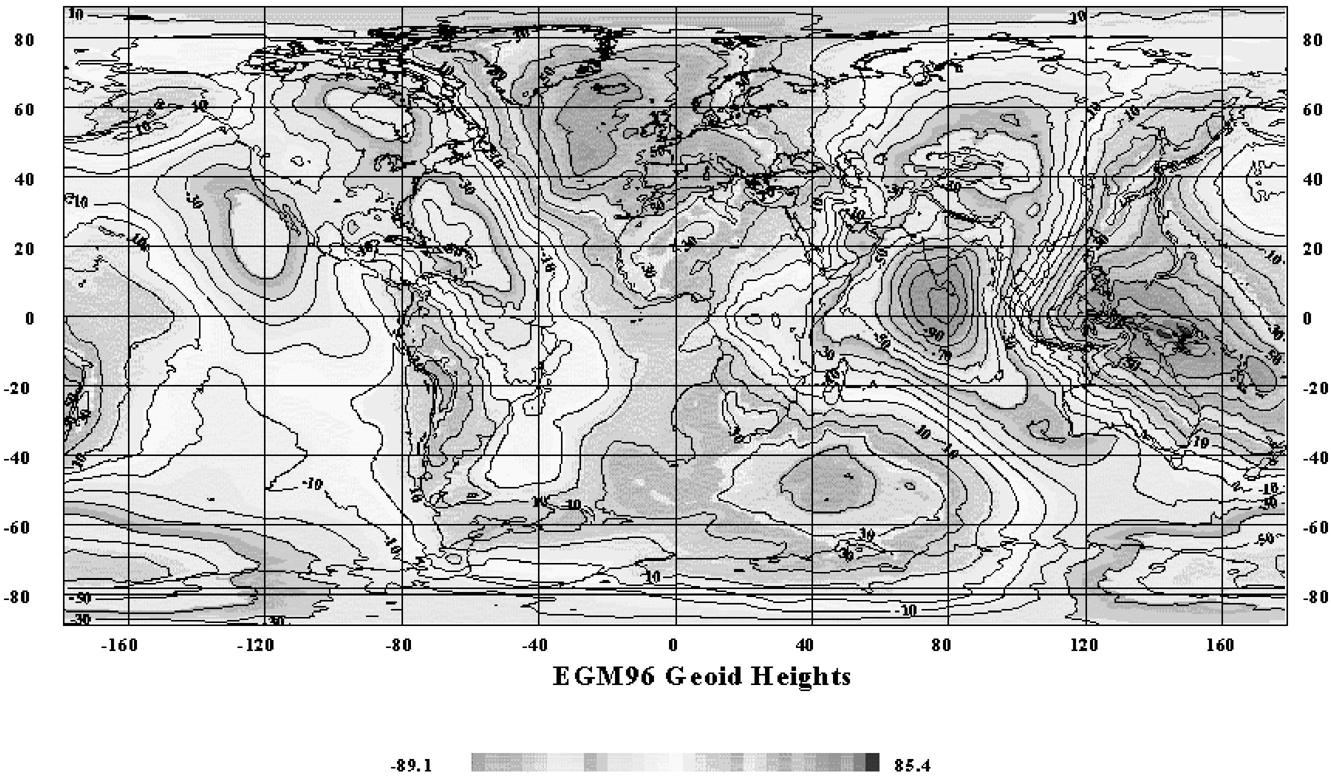
La determinación del geoide o la determinación de la forma de la Tierra, constituye uno de los principales objetivos de la gravimetría. ¿ Como se determina el Geoide?, el geoide se determina dando **la posición** de cada punto de el respecto a un **sistema de referencia**.



Por lo que se refiere al **sistema de referencia** utilizaremos uno normalizado, el elipsoide, el cual hemos establecido como figura de trabajo en capítulos anteriores.

Por lo que se refiere a la **posición** del punto, vamos a definirla como la distancia que existe entre elipsoide y el geoide medida a lo largo de la normal del elipsoide, que corresponde con la definición de N, que es la ondulación del geoide.

Con lo cual para resolver la ondulación del geoide es necesario obtener los valores de N, en la zona de estudio, si esta es mundial obtendríamos un cartografiado del geoide

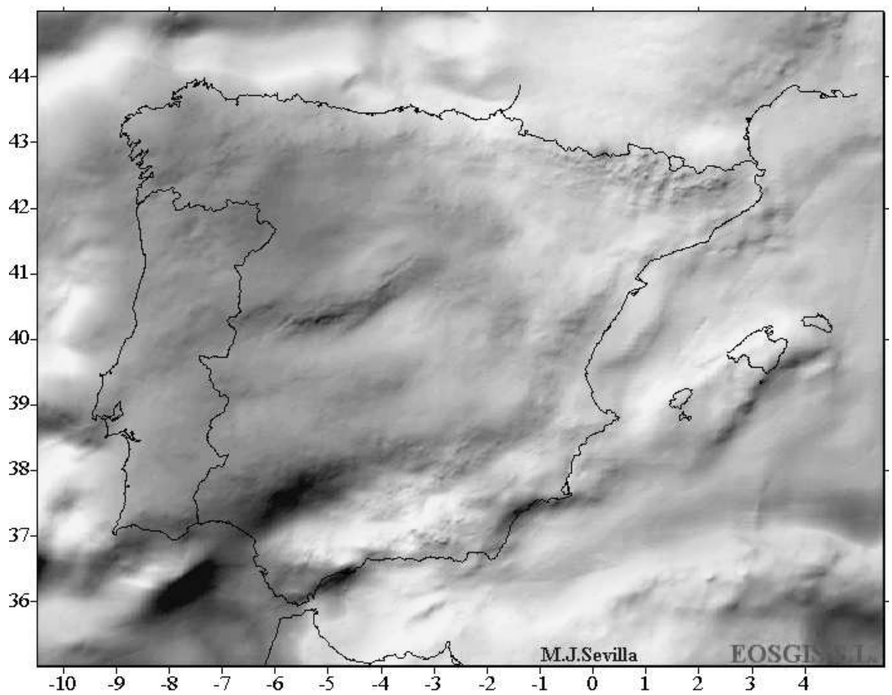


mundial, aunque lo normal es trabajar en operaciones topográficas con cartas regionales del geoide.

Normalmente existe una clasificación de los geoides en función de los datos utilizados para resolverlo. Las fuentes utilizadas para resolver N pueden ser varias.

Una forma habitual de obtención de N es a través de observables de las desviaciones relativas de la gravedad, como ya hemos visto en [4.1], el problema que presenta este método es que la obtención de los observables es muy costosa, lo que implica una muy dificil densificación de observables, con lo que generalmente en la actualidad no existen geoides que provengan netamente de las observaciones de la desviación de la vertical.

El geoide más extendido es aquel cuya fuente de datos son los observables gravimétricos en su mayor parte, estos datos se obtienen mediante la medición de la gravedad sobre la superficie terrestre y posteriormente una reducción de los valores de la gravedad adecuada. Finalmente a través de las Δg como veremos más adelante se obtienen las ondulaciones del geoide. En España uno de los geoides gravimétricos recientes es el IBERGEO 95 realizado por el Profesor Sevilla.



Finalmente nos podemos encontrar con geoides de tipo híbrido siendo los observables tanto de origen gravimétrico como desviaciones relativas de la gravedad.

Geoides gravimétricos.

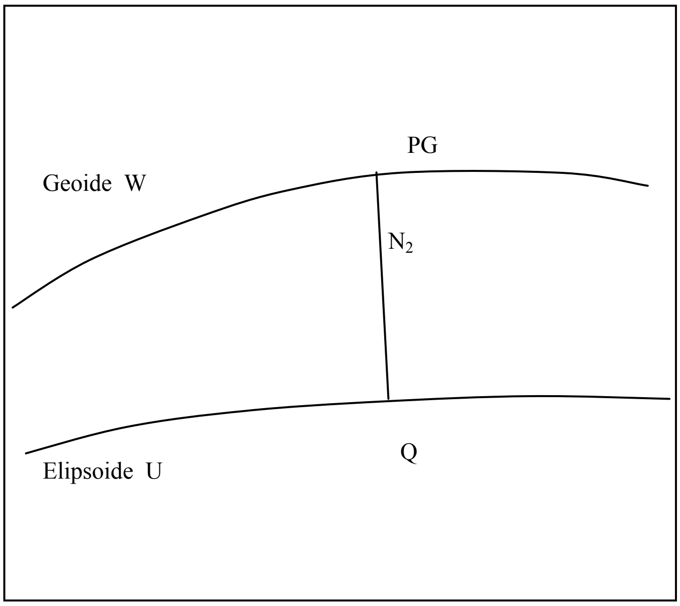
Veamos como resolver las ondulaciones del geoide a partir de las anomalías de la gravedad.

Para ello retomamos la teoría del potencial. Designamos el potencial real de la Tierra como W, y el potencial del elipsoide de nivel U, podemos establecer que el potencial de un punto sobre el geoide W, es igual al potencial desde el elipsoide más otro potencial anómalo el cual vamos a designar como T.

$$W = U + T \qquad (4.14)$$

El potencial perturbador es en verdad el potencial relacionado con la ondulación del geoide, intentemos buscar alguna relación entre ellos de una forma explicita

$$U_{PG} = U_Q + \frac{\partial U}{\partial n} N = U_Q - \gamma_N \qquad (4.15)$$



En (4.15) estamos representando el potencial normal de PG el cual no es igual al potencial real W, pero hemos establecido que la diferencia se la asignábamos a un potencial perturbador T.

$$W_P = U_Q - \gamma N + T_P \qquad (4.16)$$

Si tenemos en cuenta que el potencial del elipsoide es el mismo que el del geoide $W_P = U_Q$ podemos reescribir (4.16) quedando

$$N = \frac{T}{\gamma} \qquad (4.17)$$

Conocida como fórmula de Bruns, esta ecuación establece una relación entre el potencial y una cantidad geométrica como es N, en cualquier caso al ser T un potencial hay que establecer como obtenerlo o que relación tiene con la gravedad y la gravedad normal, se puede establecer que

$$g_{PG} - \gamma_{PG} = -\frac{\partial T}{\partial n} \qquad (4.18)$$

De forma aproximada ya que las normales no coinciden, si en (4.18) sustituimos el valor de γ_{PG} por

$$\gamma_{PG} = \gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial n} N \qquad (4.19)$$

Queda (4.18)

$$g_{PG} - (\gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial n} N) = -\frac{\partial T}{\partial n} \qquad (4.20)$$

$$\Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial n} N = -\frac{\partial T}{\partial n}$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\partial \gamma}{\partial n} N$$

Sustituimos N según la fórmula de Bruns

$$\Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial n}\frac{T}{\gamma} + \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \qquad (4.21)$$

La ecuación (4.21) es la ecuación fundamental de la Geodesia Física, ya que en ella se establece la relación entre las anomalías de la gravedad y el potencial perturbador, sin esta relación no seria posible obtener las ondulaciones del geoide N, ya que la única relación que hemos establecido con N ha sido a través del potencial perturbador.

En verdad la ecuación (4.21) es una ecuación de contorno, para obtener N hay que resolver la función T, a partir de (4.21) y de (4.22), siendo esta

$\nabla^2 T = 0 \qquad (4.22)$

Lo cual es cierto ya que T es armónica fuera del geoide, resolver T es bastante complicado y se conoce como el 3er problema de contorno, el cual se plantea como resolver T, si los datos que conocemos son una combinación lineal de T y valores de la derivada de esta $\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)$ sobre una superficie Σ (el geoide), no siendo objeto de este texto la demostración de su resolución. De cualquier forma su solución final viene dada por la conocida fórmula de Stokes

$$T(\varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi}\int_{\Sigma} \Delta g\, S(\psi)\, d\sigma \qquad (4.23)$$

donde S(ψ) es la función núcleo la cual depende de la forma de la Tierra, la cual tiene diferentes aproximaciones, la más sencilla corresponde a una Tierra esférica

$$S(\psi) = 1 + \cos ec\left(\frac{\psi}{2}\right) - 6sen\left(\frac{\psi}{2}\right) - 5\cos\psi + 3\cos\psi\ln\left[sen^2\left(\frac{\psi}{2}\right) + sen\left(\frac{\Psi}{2}\right)\right] \qquad (4.24)$$

siendo dσ un diferencial de área.

La integral se halla extendida a toda la Tierra quiere decir que para resolver la ondulación del geoide en un punto hay que realizar la integración de todas las anomalías de la gravedad